PIERRE LUCIE

FÍSICA COM MARTINS E EU

VOLUME II

DINÂMICA DA PARTÍCULA

FASCÍCULO 1

ILUSTRAÇÕES DE

Henfil

APRESENTAÇÃO

O volume II da Coleção "FÍSICA COM MARTINS E EU" trata da Dinâmica da partícula.

A estruturação conceitual dessa Dinâmica ocupa os Capítulos IX a XIV, desde os conceitos de fôrça estática e massa gravitacional até os de energia.

Terminamos, nos Capítulos XV e XVI, pelo estudo do Oscilador Harmônico e do Campo Gravitacional.

Para facilidade de manuseio, êsse Volume II está sendo publicado em dois fascículos.

O fascículo 2 (Capítulos XIV, XV e XVI) estará disponível até Julho do corrente ano (1970).

As críticas, correções, sugestões...referentes a esta Edição preliminar deverão ser remetidas para o "Departamento de Física da PUC - Rua Marquês de São Vicente - Rio de Janeiro, GB" em nome do Autor, que agradece desde já essas inestimáveis colaborações.

Rio de Janeiro, fevereiro de 1970

Pierre Lucie

E R R A T A

Pág	Linha	Onde se lê:	Ler:
1	9	, um determinado instante	, em determinado instante
45	18	XI-4 Mais uma experiência...	XI-5 Mais uma experiência...
47	16	XI-5 Massa gravitacional	XI-6 Massa gravitacional
54	19	XI-6 Pêso	XI-7 Pêso
63	10	XI-7 Volta ao equilíbrio...	XI-8 Volta ao equilíbrio...
278	12	$v_1 = 40$ m/s	$v_1 = 40$ cm/s
278	13	$v_2 = 90$ m/s	$v_2 = 90$ cm/s

ÍNDICE

Página

CAPÍTULO XII: CENTRO DE MASSA - REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA

CAPÍTULO XIII: 2ª E 3ª LEIS DE NEWTON - PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO

CAPÍTULO IX

Fôrça estática - Massa gravitacional - Pêso

IX-1 Conversa em família.

Com êsse Capítulo estamos, você e eu, pulando da Cinemática para a Dinâmica.

Dinâmica?

Sim. Veja: o que realmente importa no movimento de uma partícula é a sua aceleração.

Porque a velocidade, no fundo, pode ter, um determinado instante, o valor que quisermos.

Basta escolher convenientemente o referencial em que estudamos o movimento.

Você está convencido do que precede, sim?

Pense bem.

E em tempo: quando eu digo "valor que quisermos", não é bem isso.

Não adiantaria querermos uma velocidade superior (ou mesmo igual...) à velocidade da luz no vácuo.

Os fatídicos trezentos mil quilômetros por segundo.

Vimos isto juntos no final do Capítulo V.

Mas a aceleração é a mesma em qualquer referencial, desde que os referenciais escolhidos estejam em movimentos de translação uniforme uns em re-

lação aos outros.

Ora êsses referenciais são os únicos que utilizaremos a partir de agora e até o final dêste livro.

Eis porque, repito, é a aceleração - e não a velocidade - que realmente importa no movimento de uma partícula.

A aceleração, aquilo que vai permanecer invariante ao mudarmos de referencial.

Posição e velocidade mudam.

Mas não a aceleração.

Pois bem. A Cinemática descreveu a aceleração de uma partícula.

A Cinemática nos disse: a partícula está agora aqui com tal velocidade. E daquí a pouco ela estará alí com tal outra velocidade.

E a aceleração média entre "agora" e "daquí a pouco" vale tanto.

Mas será que você não teve até agora a curiosidade de se perguntar...

Sim Martins?

MARTINS E EU

PORQUE É QUE A VELOCIDADE DA PARTÍCULA VARIA?
EXATO MARTINS, PORQUE É QUE A VELOCIDADE DA PARTÍCULA VARIA?

PORQUE ELA TEM ACELERAÇÃO NÉ?
E PORQUE ELA TEM ACELERAÇÃO?

MAS PORQUE A VELOCIDADE...

NÃO! POR FAVOR MARTINS!
NÃO VAMOS ENTRAR EM CÍRCULO VICIOSO. DEFINIMOS A ACELERAÇÃO COMO SENDO A TAXA DE VARIAÇÃO DA VELOCIDADE. O PROBLEMA É DESCOBRIR O QUE É QUE PROVOCA ESSA VARIAÇÃO, SEJA LÁ O NOME QUE VOCÊ QUIZER LHE DAR!!

VAMOS LÁ...

É precisamente a tarefa da Dinâmica de procurar as causas responsáveis pela aceleração da partícula.

A Dinâmica fixa responsabilidades, por assim dizer.

E no palco armado em Cinemática, onde até agora evoluiam tempo e distância, ela introduz o último papel fundamental: a massa.

E um coadjuvante que vai aparecer como um dos personagens mais ativos e necessários: a fôrça.

Pois são precisamente as fôrças que produzem as acelerações.

IX-2 Puxar, empurrar, sustentar.

A dona de Casa que puxa o carrinho carregado com as compras da feira...

O Martins que empurra o irmãozinho (coitado...) para chegar primeiro à poltrona em frente do aparelho de televisão...

A moça que sustenta nos braços uma criança...

...A dona de Casa, e o Martins, e a moça, exercem fôrças.

Não quero, por enquanto, refinar muito mais o conceito intuitivo de fôrça que todos nós temos desde a infância.

Desde que nos curvamos pela primeira vez para apanhar o primeiro brinquedo que caiu no chão.

Até experiências talvez menos agradáveis mas não menos educativas. (Fig. IX-1).

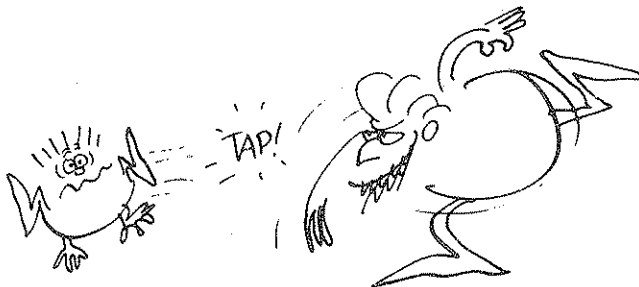



Figura IX-1

O leigo chama intuitivamente fôrça ao que puxa, ao que empurra, ao que sustenta.

E êsse conceito intuitivo não é muito diferente do conceito do Físico.

Espero que aos poucos você se familiarise com a noção de fôrça.

Vamos juntos, devagar. Não é difícil.

IX-3 Fôrças que deformam - Fôrças estáticas.

IX-3-1 Algumas experiências com elásticos.

O elástico de escritório é um dos instrumentos mais úteis em Dinâmica.

Como é barato e fácil de encontrar, eu lhe aconselho de ter sempre uma coleção no bôlso.

Já tem?

Então vamos lá.

Pegue um elástico e estique-o (Fig. IX-2).

Você está pxxando o elástico com ambas as mãos. E o conjunto de sensações neuro-musculares que você ressente é semelhante aos que suas experiências anteriores lhe impunham, quando você puxava, ou empurrava, ou sustentava coisas.

Acho que podemos concordar, você e eu, que suas mãos estão exercendo fôrças sôbre o elástico.

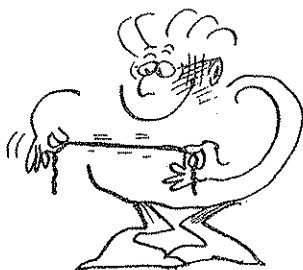



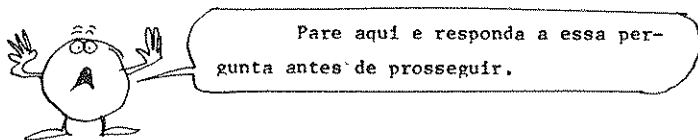
Figura IX-2

Discutamos um pouco essa experiência.

Entregue o elástico a um colega.

Eu entreguei o meu ao Martins.

O seu colega, e o Martins, estão segurando o elástico com ambas as mãos, pelas extremidades.

Sòmente ao olhar, será que você e eu podemos saber se há fôrças exercidas sôbre o elástico?

Claro! Você disse: "É muito simples. Basta verificar se o elástico está ou não <u>deformado</u>".

Deformado. Isto é, esticado, <u>alongado</u>.

Quando olhamos para o elástico pousado sôbre uma mesa, sabemos que não há fôrças aplicadas porque o elástico não está deformado; não está alongado.

Mas quando olhamos para o elástico do Martins...

Figura IX-3

Fôrças que deformam... e às vêzes quebram.

...sabemos que há (ou melhor talvez, havia) fôrças aplicadas, porque o elástico estava deformado; estava alongado.

Há mais. A fôrça que estamos exercendo para alongar o elástico depende do alongamento que quisermos dar.

De acôrdo?

Alongamento pequeno, fôrça pequena.

Alongamento grande, fôrça maior.

Observe que eu continuo, por enquanto, dando à palavra "fôrça" o senti
do intuitivo que todo mundo tem.
Todo mundo.
Mesmo quem não estuda Física.

Mais um passo: se eu alongo o meu elástico, agora, de 10cm, eu necessito de uma certa fôrça.

Depois de alongá-lo de 10cm, eu largo o elástico, que volta ao seu estado inicial. Eu o deixo em cima da mesa.

E vou dar uma volta.

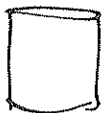
Uma hora depois, ou um dia, ou um mês, volto a alongar o elástico de 10cm.

Preciso exercer a mesma fôrça.

Como precisarei exercer a mesma fôrça tôdas as vêzes que alongar o mesmo elástico dos mesmos 10cm.

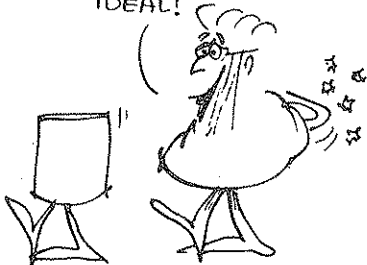
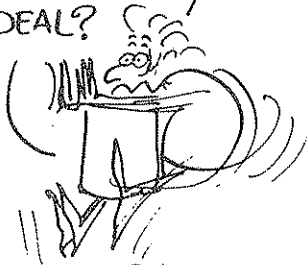
Mas a coisa estava indo bem demais...

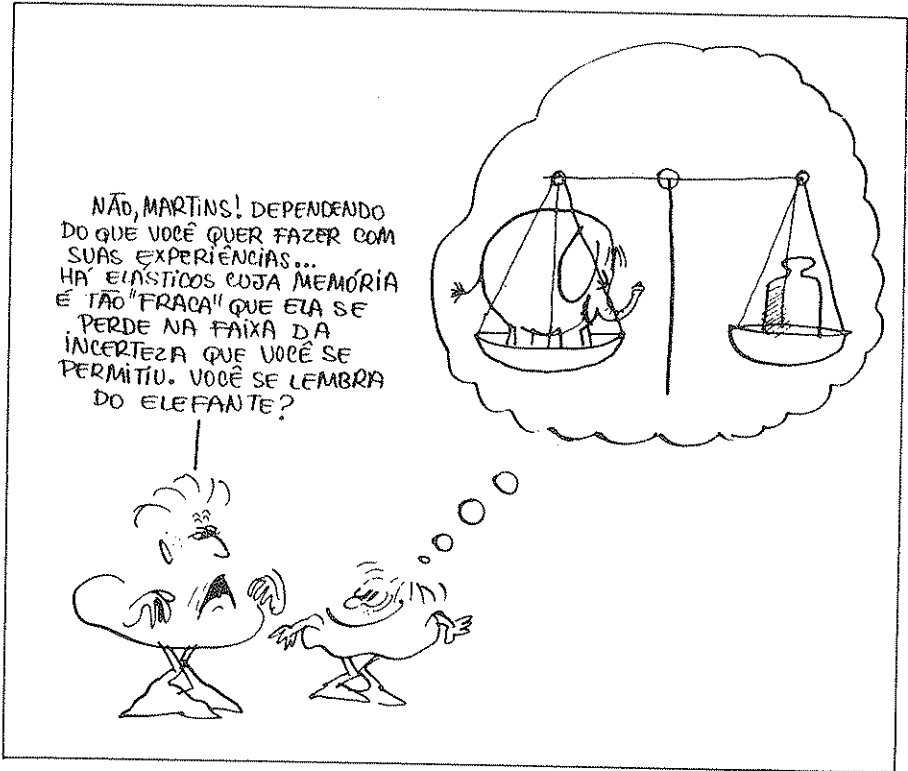
MARTINS E EU

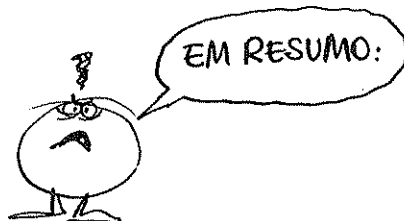
DESCULPE PROFESSOR, MAS O SENHOR NÃO ESTARIA SENDO UM POUCO OTIMISTA?

UAU!
HEIM?

DIZENDO QUE TÔDAS AS VÊZES QUE ALONGAR O MESMO ELÁSTICO DA MESMA QUANTIDADE, A FÔRÇA SERÁ A MESMA?

E SE O ELÁSTICO GASTAR?

ENTENDO SEU ARGUMENTO! TINHA ESQUECIDO DE DIZER QUE O ELÁSTICO É SUPOSTO IDEAL!

IDEAL?
PUF!

MANEIRA DE FALAR, MARTINS! A "MEMÓRIA" DE UM COMPUTADOR PODE SER UMA FITA MAGNÉTICA GRAVADA, ISTO É, MARCADA POR UMA EXPERIÊNCIA PASSADA... O ELÁSTICO, UMA VEZ ALARGADO NÃO VOLTA EXATAMENTE AO ESTADO INICIAL. FICA UM POUCO ALONGADO... ÊLE SE LEMBRA DO PASSADO...

NÃO, MARTINS! DEPENDENDO DO QUE VOCÊ QUER FAZER COM SUAS EXPERIÊNCIAS...
HÁ ELÁSTICOS CUJA MEMÓRIA É TÃO "FRACA" QUE ELA SE PERDE NA FAIXA DA INCERTEZA QUE VOCÊ SE PERMITIU. VOCÊ SE LEMBRA DO ELEFANTE?

Mas então, supondo o elástico ideal, estava eu dizendo, no fundo, que as mesmas causas produzem os mesmos efeitos...

...E que a mesma fôrça será sempre necessária para produzir o mesmo alongamento.

Um elástico é um instrumento útil para começarmos a pesquizar o conceito de fôrça, partindo da noção intuitiva que todos possuimos.

É preciso exercer uma fôrça para alongar um elástico.

Maior o alongamento, maior a fôrça.

E o elástico ideal responde sempre da mesma maneira à nossa solicitação.

IX-3-2 Em que se faz uma primeira tentativa para medir fôrças.

Uma deformação que varia conforme a fôrça aplicada...

...E que é repetitiva...

Será que já podemos medir fôrças?

Pare um momento para pensar em tudo o que acabamos de dizer até aqui.

E me dê sua opinião sincera.

Você acha que já temos elementos suficientes para "inventarmos" um processo de medição da fôrça?

Pense bem. Isto é muito importante.

Argumento contra: ainda nem sabemos ao justo o que é fôrça...

Mas você pensou bem. E raciocinou certo.

Posso definir fôrça por "aquilo que é capaz de deformar um corpo... por exemplo alongar um elástico".

Essa definição baseia-se nas experiências que estamos realizando agora, ao brincarmos com elásticos.

O que não proíbe uma futura extensão do conceito, no caso de verificarmos que fôrças podem ter outros efeitos.

Mas uma definição não é suficiente para transformar algo, mesmo "por decreto", em grandeza física.

É preciso saber medir uma fôrça.

Mas como?

Tente responder a essa pergunta antes de prosseguir.

Seria realmente muito importante que você possa chegar sòzinho a uma conclusão.

Como?... Ótimo! Você acertou: podemos tomar como unidade de fôrça a fôrça necessária para alongar determinado elástico de determinada quantidade.

Ou qualquer elástico idêntico da mesma quantidade.

Continuo referindo-me, evidentemente, a elásticos ideais. Ou pelo menos suficientemente ideais para o que pedimos de nossas experiências.

Muito bem. Para poder reproduzir o meu "padrão", achei melhor comprar no armarinho uma peça de elástico.

Corto um pedaço. Meço: 18,5cm.

Trata-se do elástico relaxado, sem deformação.

Para poder definir fàcilmente o comprimento quando eu seguro as extremidades, eu procuro algo... Ah! já sei. Fixo as pontas, com um pouco de cola Polar, sôbre dois quadradinhos de cartolina, como mostra a Fig. IX-4.

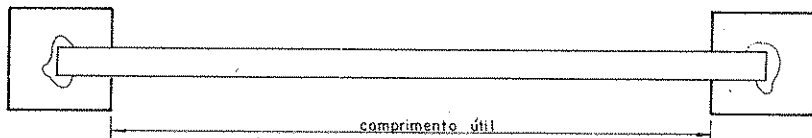



Figura IX-4

Meço de novo o comprimento útil do elástico relaxado: 17,5 cm. Ótimo.

Estico agora o elástico.

Martins, quer dar uma ajuda? Meça o comprimento útil.

Quanto? 23 centímetros? Obrigado!

Defino como unidade de fôrça, a fôrça necessária para alongar aquêle elástico da Fig. IX-4 de 23 - 17,5 = 5,5cm.

Ou qualquer outro elástico idêntico a êste.

E como tem que dar um nome a tôda unidade nova, eu chamo essa unidade a UF!

Mas parece que o Martins não gostou do nome...

MARTINS E EU

PROFESSOR! O SR. ENSINOU PRA GENTE, NO CAPÍTULO I, QUE PADRÃO DE GRANDEZA FÍSICA DEVE SER FÀCILMENTE REPRODUTÍVEL...
E DEVE, NÃO ACHA?
ACHO! E O SENHOR ACHA QUE MEU COLEGA ✱, LÁ NO JAPÃO, VAI PODER REPRODUZIR FÀCILMENTE ÊSSE PADRÃO?
?
✱ MARTINS PRETENDE QUE AQUILO É MAH TIN EM JAPONÊS. NÃO ACEITO RESPONSABILIDADE...

SERÁ QUE ÊLE TEM QUE VIR AQUI NO BRASIL PARA SE ABASTECER NO SEU ARMARINHO??
MAS...
NÃO ACHA QUE ELÁSTICO É UM MATERIAL MEIO ORDINÁRIO PARA UM PADRÃO??
MAS...

O SENHOR POR ACASO PEDIU A OPINIÃO DOS SEUS COLEGAS FÍSICOS PARA TOMAR UMA DECISÃO TÃO IMPORTANTE, OU DECIDIU SÒZINHO??

BASTA MARTINS!!

CLARO QUE VOCÊ TEM RAZÃO. MAS A UF É SÒMENTE UMA UNIDADE PROVISÓRIA, MARTINS... UMA UNIDADE "FAZ DE CONTA"!

O QUE IMPORTA AGORA É O CONCEITO. MAIS TARDE SUBSTITUIREMOS A UF POR UMA UNIDADE MAIS SÉRIA... MAS A FÍSICA PERMANECERÁ A MESMA!
UF!

Acabamos de dar oficialmente o nome de fôrça ao que provoca a deformação de corpos... deformáveis.

Todos os corpos são deformáveis.

Em grau maior ou menor. Mas todos.

Os objetos, por menores que sejam à nossa escala, são formados por átomos, ou íons, ou moléculas, separados por distâncias variáveis.

Variáveis com as fôrças aplicadas.

Não se assuste. Voltaremos ao assunto logo mais adiante na seção IX-6.

Mas que fique bem claro, desde já, que são fôrças que alongam os elásticos - por definição! -

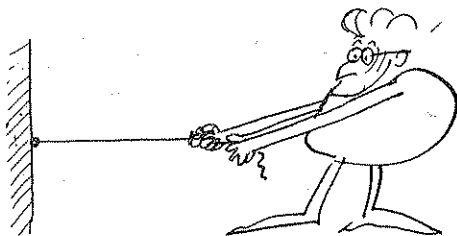
São fôrças que deformam a bola de tênis batida pela raquete.

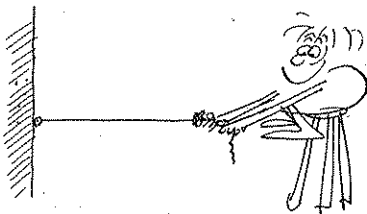
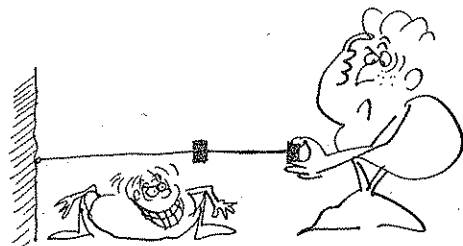
A bola de futebol batida pelo pé.

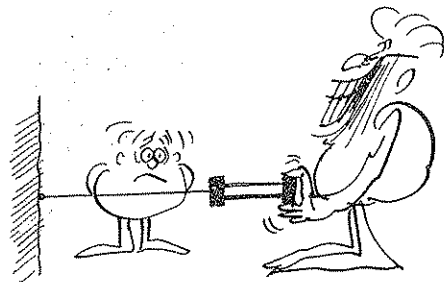
O galho da árvore que o vento açoita.

A vela do barco que singra o mar...

A fôrça que deforma um corpo pode ser medida pela deformação que ela provoca.

É assim que definimos a unidade de fôrça, a UF.

Na Figura IX-5, eu amarrei um elástico a uma parede e estiquei, puxando a outra extremidade.

Qual é a fôrça que exerço?

Ah! já sei! Vou buscar o meu padrão enquanto Martins segura o elástico na mesma posição.

Amarro o padrão na extremidade.

Mas para manter o elástico com o mesmo comprimento eu tenho que alongar o padrão de mais de 5,5cm!

Eu amarro então dois padrões lado a lado.

E agora observo que para manter o elástico com o mesmo comprimento eu devo esticar ambos os padrões de 5,5cm. Concluo:

UF + UF = 2UF

Concorda?

Figura IX-5

MARTINS E EU

NÃO CONCORDO NÃO SENHOR!
MAS PORQUE MEU DEUS?

DEFINIMOS A UF COMO SENDO A FÔRÇA NECESSÁRIA PARA ALONGAR O PADRÃO DE 5,5 cm. ORA, O SENHOR PEDIU A FÔRÇA EXERCIDA SÔBRE O ELÁSTICO AMARRADO À PAREDE, NÃO É MESMO?
É!

PARA MEDIR ESSA FÔRÇA, AMARROU DOIS PADRÕES AO ELÁSTICO DA PAREDE E O SENHOR OBSERVOU QUE CADA UM DÊLES ALONGAVA DE 5,5 CM...

MAS, ENTÃO, TUDO QUE O SR. PODE AFIRMAR É QUE O ELÁSTICO DA PAREDE POR UM LADO E O SR. PELO OUTRO, EXERCEM FÔRÇAS DE 2 UF SÔBRE O PADRÃO...

MAS O QUE QUEREMOS É A FÔRÇA QUE O PADRÃO EXERCE SÔBRE O ELÁSTICO!

GRRRR...
NÃO É QUE VOCÊ TEM RAZÃO MESMO, MARTINS!

É mesmo. Martins tem tôda razão.

Mas nessa altura você já deve ter a resposta. Não?

Veja. Eu amarro dois elásticos idênticos um a seguir do outro, como na Fig. IX-6.

Eu estico o conjunto.

Observo que qualquer que seja o comprimento total os dois elásticos conservam sempre o mesmo comprimento.

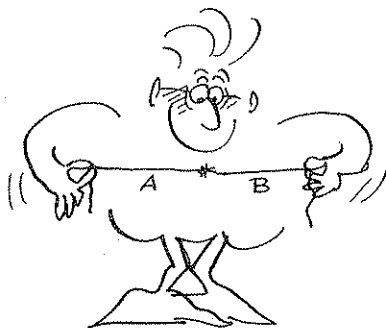



Figura IX-6

O que prova que A exerce sôbre B a mesma fôrça que B exerce sôbre A, não é mesmo?

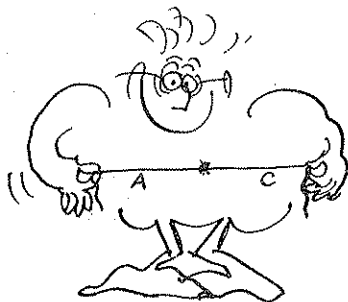



Figura IX-7

E agora, sem dizer nada ao elástico A eu substituo B por um elástico C diferente. (Fig. IX-7).

Estico o conjunto até que A volte a ter o mesmo comprimento que tinha na experiência precedente.

Conclusão? Vamos!... Raciocine!...

Nessa segunda experiência o estado do elástico A é o mesmo que na primeira de modo que C exerce sôbre A a mesma fôrça que B exercia.

E obviamente, sendo A coerente com êle mesmo, como qualquer elástico bem comportado deve ser, êle exerce sôbre C a mesma fôrça que êle exercia sôbre B.

De nôvo: A exerce sôbre C a mesma fôrça que C exerce sôbre A.

Quando dois elásticos estão amarrados um ao outro, cada um puxa sôbre o outro da mesma maneira.

Um age. O outro reage.

Ação e reação... Iguais.

Voltemos então, juntos, à experiência da Fig. IX-5.

Podemos agora concluir que, realmente, a fôrça que os padrões exercem sôbre o elástico é de 2UF.

E obrigado, Martins.

E já que estamos "esquentando" no assunto, tentemos outra experiência.

IX-3-4 <u>...Mas havia vetores no ar...</u>

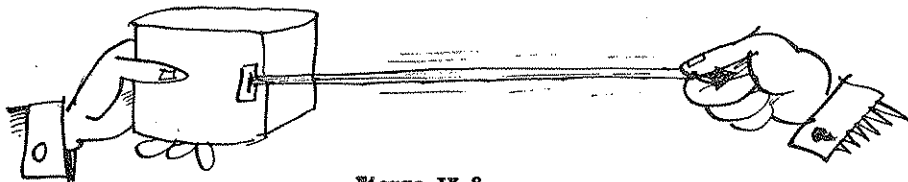



Figura IX-8

Eu tenho uma borracha que eu seguro na mão esquerda. Amarrei o meu padrão à borracha e puxo com a mão direita, como na Fig. IX-8.

O Martins, que me ajuda também nesta experiência, mede o comprimento

do padrão: 1UF.

Muito bem. Fôrça de 1UF exercida pelo elástico sôbre a borracha.

A borracha está deformada?

Acredito que sim. Embora eu não possa observar, a ôlho, essa deformação.

Mas o elástico puxa sôbre as moléculas da extremidade da borracha.

Elas cedem um pouco e vão para a direita. Muito pouco.

Mas "chamando" as outras que estão à esquerda delas.

As quais cedem um pouco... muito pouco...

E assim por diante.

Certo. Acredito que a borracha também está deformada.

...E grudando uma extremidade do padrão numa das faces menores da borracha faço outra experiência.

Eu seguro a borracha como na Fig. IX-9 e puxo o elástico para baixo.

Você entendeu bem a diferença entre a situação da Fig. IX-8 e a da Fig. IX-9?

Ótimo!

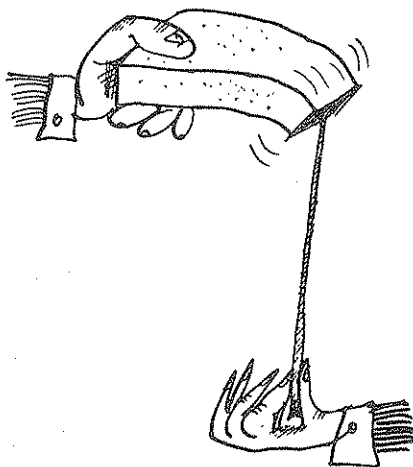



Figura IX-9

O padrão está alongado dos mesmos 5,5cm que na primeira experiência: 1UF de novo.

De modo que o elástico está exercendo sôbre a borracha a mesma fôrça nas duas experiências.

Mas espere um pouco...

Algo está errado em tudo isto.

Mesma fôrça? Mas veja a deformação da borracha.

Pràticamente invisível na primeira experiência.

E pelo contrário bem aparente na experiência da Fig. IX-9, onde a flexão da borracha salta aos olhos.

Mesma fôrça? Mas se a fôrça fôsse a mesma o efeito deveria ser o mesmo, não é?

Como? Ah! sim Martins... Pode falar!

De modo que não basta dizer: eu aplico à borracha uma fôrça de 1UF.
É preciso definir a direção em que se aplica essa fôrça.

E também o sentido. Se eu tivesse puxado para cima na experiên-cia da Fig. IX-9 - na mesma direção mas em sentido contrário - a borracha teria refletido para cima. Em sentido contrário.

Ah! mas isto é grave.

Eu pensava saber medir uma fôrça... Fácil!...

E de repente descubro que não é tão simples assim.

"1UF" sòzinho não é suficiente.

Um número só não basta para medir uma fôrça.

Conclusão? Fôrça não é grandeza escalar.

E como prometi a você, no primeiro Capítulo, que só encontraríamos nêste livro grandezas escalares e grandezas vetoriais, segue-se que, não sendo escalar, fôrça é grandeza vetorial.

Como? Você não acha isto muito honesto?

E já estou ouvindo o Martins dizendo que se sente "tapeado"...

Figura IX-10

E pessoalmente me sinto um pouco culpado.

Um pouco como se tivesse tentado uma "mágica" por cima de você.

A Fig. IX-10 está querendo lhe mostrar meu arrependimento.

Bom! Vamos tentar recuperar isso.

Com cartolina, cola Polar, e vários pedaços idênticos de elástico, preparo os sistemas representados na fotografia da Fig. IX-11.

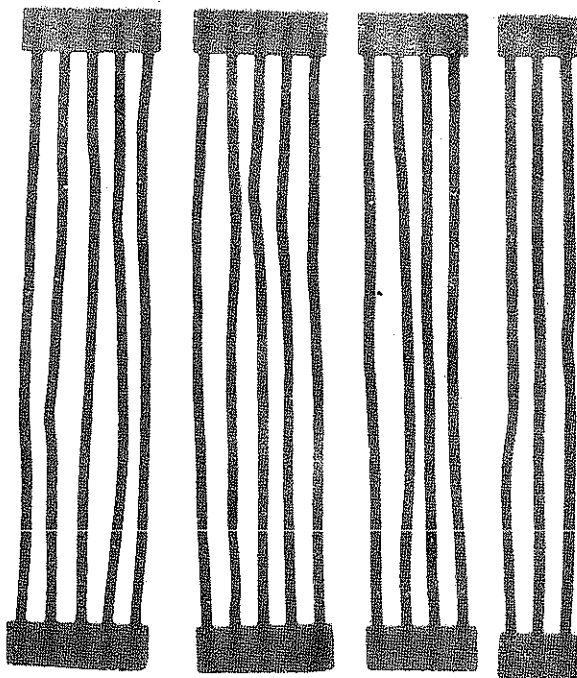



Figura IX-11

Dois sistemas de cinco elásticos montados "em paralelo".

Um sistema com quatro elásticos.

Um sistema com três elásticos.

E o comprimento útil de todos os elásticos relaxados é 17.5cm.

Amarro os dois sistemas de cinco elásticos um a seguir do outro, "em série". Estico pelas extremidades até que o comprimento útil atinja 23 cm para todos os elásticos, e fixo essas mesmas extremidades com alfinêtes sôbre uma prancheta.

E bato uma fotografia. A da Fig. IX-12.

Para simplificar, chamemos A ao conjunto de cima, B ao de baixo.

A exerce sôbre B uma fôrça de 5UF.

Qual a fôrça que B exerce sôbre A?

Responda a essa pergunta antes de prosseguir!

Certo! Também 5UF. Ação e reação.

Mas não basta dizer isto.

Em que direção B está puxando sôbre A?

Na direção definida pelos elásticos paralelos entre si.

Em que sentido?

Para baixo.

Reuno essas informações tôdas na Figura IX-13. Nessa figura representei o sistema A, e substitui o sistema B pela fôr-

Figura IX-12

ça que êle exerce sôbre o sistema A.

Pois você não concorda que a única coisa que A "conhece" de B é essa fôrça?

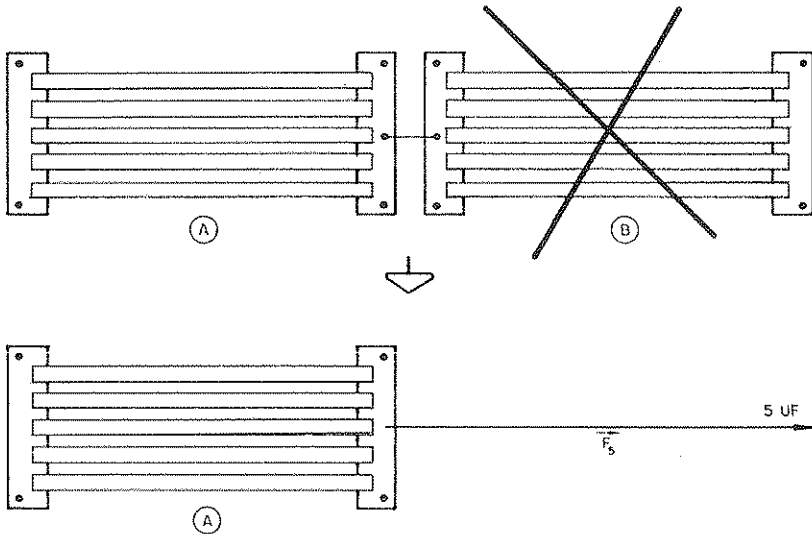



Figura IX-13

Se aceitarmos, pelo menos provisoriamente, que fôrça é grandeza vetorial, podemos representar essa fôrça pelo símbolo $\vec{F_5}$, e gràficamente pelo segmento orientado que eu desenhei na Fig. IX-13.

Se aceitarmos, disse...

Mas então, admitindo que seja realmente grandeza vetorial, será que podemos imaginar uma experiência que possa confirmar... ou infirmar, êsse"palpite"?

Acho que podemos.

A propriedade fundamental das grandezas vetoriais é poderem somar-se como os vetores de posição. Vimos isto juntos no Capítulo VI.

Tentemos então substituir o sistema B, cujo papel único era de exer

cer sôbre A a fôrça $\overrightarrow{F_5}$, pelo conjunto dos sistemas C (o de quatro elásticos) e D (o de três elásticos).

A regra do jôgo é òbviamente a seguinte: o sistema A não deve perceber a substituição.

Como é que vou saber que A não percebeu a substituição?

É muito simples: comparando o seu comportamento nos dois casos. Se o comportamento de A nas duas experiências (o que já fizemos e a que vamos fazer) fôr idêntico, poderemos razoàvelmente afirmar que a solicitação, isto é, a fôrça exercida, é a mesma. Já utilizamos êsse mesmo raciocínio na seção precedente.

O comportamento de A será idêntico se o seu alongamento fôr o mesmo. Que outro comportamento pode ter um elástico se não fôr alongar-se?

Vamos então para a

SEGUNDA EXPERIÊNCIA!

Conservei o sistema A com uma extremidade fixa na prancheta.

Amarrei a outra extremidade de A, bem como os sistemas C e D, a uma argolinha de metal.

E procurei por tentativas as posições dos sistemas C e D alongados até 23 cm que conservassem A no mesmo estado que na primeira experiência.

Qual é a razão de querer os sistemas C e D alongados até 23cm?

Pense...

O comprimento relaxado é 17,5cm.

1UF corresponde a um elástico de 17,5cm alongado até 23cm.

Os sistemas C e D têm respectivamente...

O melhor que eu consegui está representado na fotografia da Figura IX-14.

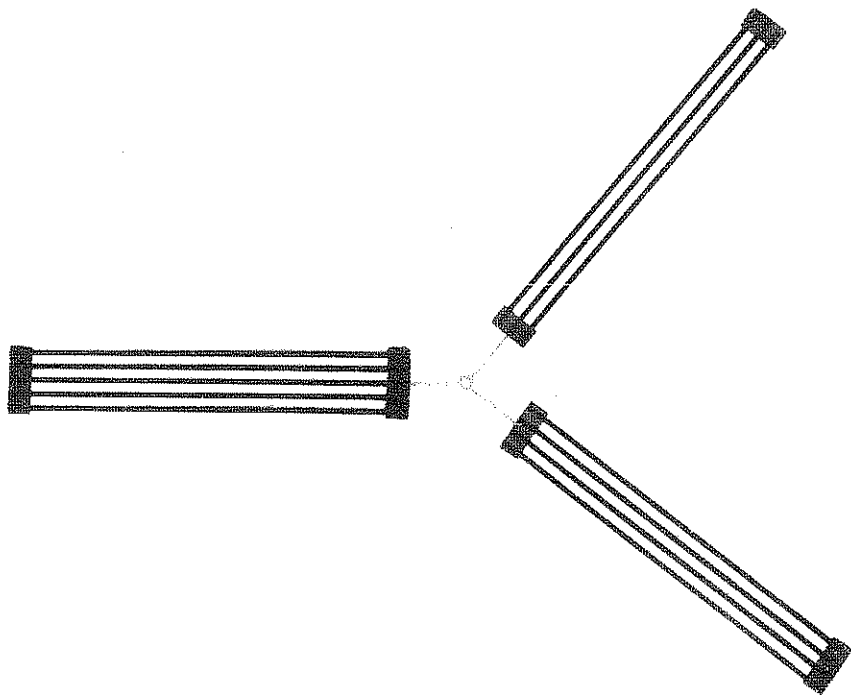



Figura IX-14

Analisemos isto.

Para simplificar o raciocínio, eu lhe proponho considerar como pertencendo a cada um dos sistemas A C D o pedaço de arame e a terça parte da argola que lhe são associados.

Isto talvez não seja muito claro mas espero que a Fig. IX-15 explique suficientemente o que quero dizer.

Não vejo muita dificuldade conceitual nisto. Afinal das contas o arame é um prolongamento do pedaço de cartolina.

E a argola é um prolongamento do arame.

Muito bem. Voltemos à fotografia IX-14.

Meço os comprimentos úteis dos três sistemas. (Não na fotografia. Ela não reproduz a verdadeira grandeza dos sistemas. Medi nos sistemas reais, no Laboratório).

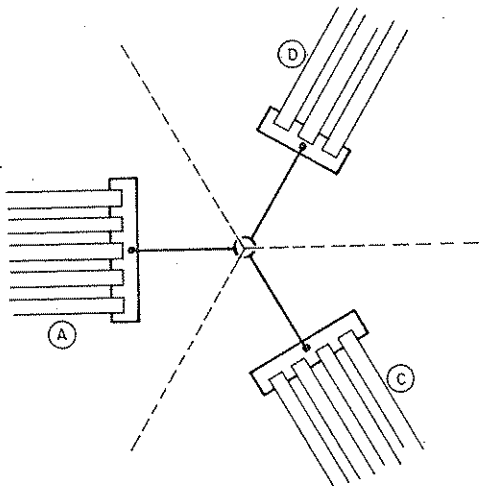



Figura IX-15

...que dá a Cesar o que é de Cesar.

Dentro de uma faixa de incerteza que considero razoável, os três sistemas têm o mesmo comprimento útil: 23cm.

O que eu considero razoável não deve sê-lo necessàriamente para você.

Faça o problema IX-23 e discuta livremente o assunto. Discordando do meu "razoável" se você achar conveniente.

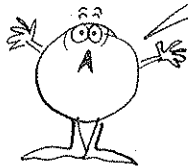
E a propósito...

Quando tinha sua idade eu era um bocado exigente.

Faça-me um favor: seja tão exigente comigo como eu era com meus Professores.

RÉ..RÉ..RÉ...

E quando digo: "faça-me um favor" é maneira de falar.
É a você mesmo que você fará o favor.

...Martins! não adianta rejubilar-se. Ser exigente não significa SER DO CONTRA!

E comparando as fotografias IX-10 e IX-12 observo que o sistema A está efetivamente no mesmo estado, nas duas experiências.

Concluo que a fôrça exercida sôbre êsse sistema é a mesma.

E ao representar essa fôrça por um segmento orientado - supondo que fôrça é grandeza vetorial... - tenho que representá-la pelo mesmo segmento em ambos os casos.

Insisto porque é conceitualmente importante. Elástico não tem olhos, nem câmera fotográfica. O que êle pode saber do mundo externo vem através das mudanças que êle próprio sofre.

Tôdas as vêzes que êle se encontra em determinado estado (alongamento), diz êle com os seus botões: "o mundo externo é o mesmo"...

E no entanto...

E no entanto, ao olhar para a fotografia da Fig. IX-14, não posso me impedir de ver dois segmentos orientados.

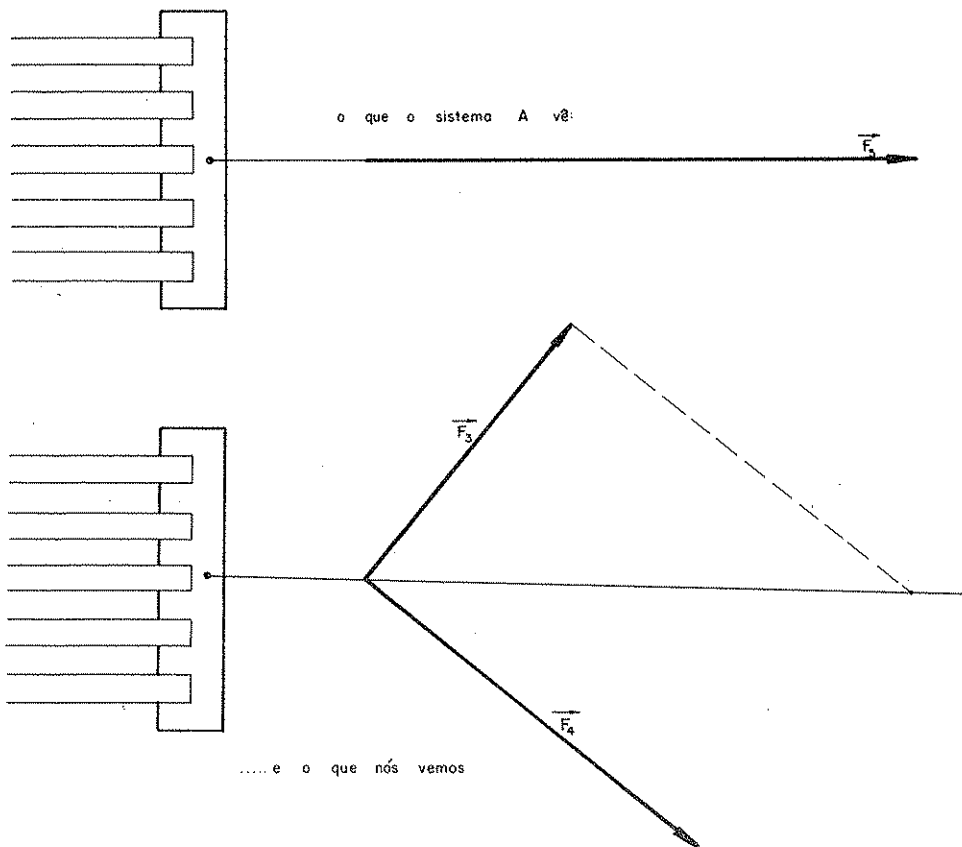



Figura IX-16

Estamos, todos nós, meio "viciados" em pensar logo em setas, ou flechas, quando lidamos com grandezas vetoriais.

O resultado é o que mostra a Fig. IX-16.

Aí você tem o ponto de vista do sistema A.

E nosso ponto de vista.

A propósito, quais são os módulos das fôrças exercidas pelos sistemas C e D respectivamente sôbre o sistema A?

Falo em módulo porque continuo supondo que fôrça é grandeza vetorial. É assim que, sem dizê-lo explìcitamente; eu escrevi que o módulo de $\vec{F_5}$ é 5UF.

Bem, acho que você já descobriu que o módulo da fôrça $\vec{F_4}$, exercida por C sôbre A, é 4UF.

E que o módulo da fôrça $\vec{F_3}$, exercida por D sôbre A, é 3UF.

Na Fig. IX-16 os segmentos $\vec{F_5}$ $\vec{F_4}$ e $\vec{F_3}$ estão representados em escala. No desenho original o comprimento de $\vec{F_5}$ era 10cm, o de $\vec{F_4}$, 8cm e o de $\vec{F_3}$, 6cm.

E vem agora o ponto crucial de tudo isto.

A soma vetorial de $\vec{F_4}$ e $\vec{F_3}$ é igual a $\vec{F_5}$, dentro da faixa de incerteza aceitável na experiência, e que você discutirá no Problema IX-23.

A construção da soma foi feita na Fig. IX-16. Verifique.

Entendemos agora porque o comportamento do sistema A, é idêntico nas duas experiências. O conjunto {C D} é equivalente ao sistema B porque as fôrças exercidas por C e D agindo juntos se somam vetorialmente para dar uma fôrça igual a $\vec{F_5}$.

E agora podemos tranquilamente afirmar que fôrça é uma grandeza vetorial.

Em tempo: a soma vetorial de $\vec{F_4}$ e $\vec{F_3}$ é geralmente chamada resultante dessas duas fôrças.

A resultante de $\vec{F_4}$ e $\vec{F_3}$ é $\vec{F_5}$ porque o conjunto {$\vec{F_4}$ $\vec{F_3}$ } tem o mesmo efeito que $\vec{F_5}$ sôbre o sistema A.

IX-3-5 <u>Ação e reação de novo</u>.

Sendo fôrça uma grandeza vetorial, o que dissemos na seção IX-3-3 sôbre ação e reação pecava um pouco pela precisão, não acha?

"A fôrça exercida por <u>A</u> sôbre <u>B</u> é igual à fôrça exercida por <u>B</u> sôbre <u>A</u>".

Não deve ser bem isso, não...

Repito a experiência que já tinha feito com dois elásticos quaisquer <u>A</u> e <u>B</u> (Fig. IX-17).

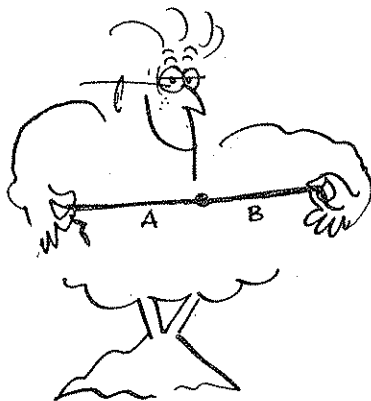



Figura IX-17

Observe bem...

Ah! mas agora tudo se torna claro.

O elástico <u>A</u> exerce sôbre o elástico <u>B</u> uma fôrça dirigida para a esquerda.

O elástico <u>B</u> exerce sôbre o elástico <u>A</u> uma fôrça <u>de mesmo módulo</u> <u>di</u>

rigida para a direita.

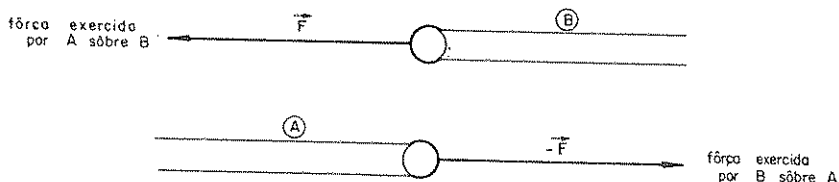



Figura IX-18

Se a primeira fôrça é $\vec{F}$, a outra é $-\vec{F}$.

Ação e reação... fôrças de mesmo módulo, de mesma direção, mas de sentidos contrários.

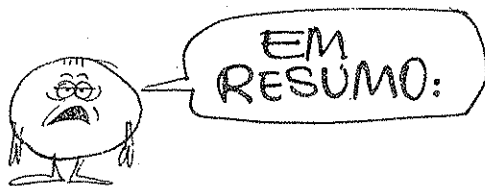
A Fig. IX-18 mostra o "par ação-reação" $(\vec{F}, -\vec{F})$.

Não Martins, não!

Não adianta perguntar qual é a ação e qual é a reação...

Como? quer decidir por cara-ou-corôa? Por que não!

Mas vamos a coisas sérias.

Qual é a evidência experimental que me permitiu afirmar que ação e reação têm mesma direção?

Se dois corpos se deformam mùtuamente, as fôrças que êles exercem um sôbre o outro constituem um par ação-reação.

Ação e reação são duas fôrças de mesmo módulo, de mesma direção, mas de sentidos contrários.

E ESSAS DUAS FÔRCAS AGEM SÔBRE CORPOS DIFERENTES.

SEMPRE... SEMPRE...

Isso de agir sôbre corpos diferentes é <u>muito importante</u>.

Pense bem no assunto para "digerí-lo".

E não esqueça de fazer os exercícios do Problema IX-24.

IX-4 <u>Equilíbrio da partícula</u>.

IX-4-1 <u>Repouso e equilíbrio</u>.

Enquanto estou escrevendo, eu tenho uma borracha na minha frente, pousada na mesa.

A posição da borracha, medida no referencial do meu escritório, é invariante com o tempo.

Eu digo que, nêste referencial, a borracha está em repouso.

Ontem, assisti a retransmissão via satélite de cenas tomadas no interior da Apolo 9. O referencial no qual a câmera estava filmando era o referencial da nave.

Em dado momento um dos astronautas largou uma lapiseira " no meio do ar". A lapiseira ficou "flutuando" no mesmo lugar.

A lapiseira estava em repouso no referencial da nave.

Mas o que é que estava dizendo? Ah! sim.

A lapiseira estava em repouso no referencial da nave.

Pois bem. Voltemos juntos à fotografia da Fig. IX-14.

Observe a argola na qual estão amarrados os sistemas de elásticos <u>A</u> <u>C</u> e <u>D</u>.

A fotografia foi batida no Laboratório.

No referencial do Laboratório a argola está em repouso.

Há mais, porém.

Quais são as fôrças que atuam sôbre a argola?

A Fig. IX-19 mostra os segmentos que representam essas fôrças.

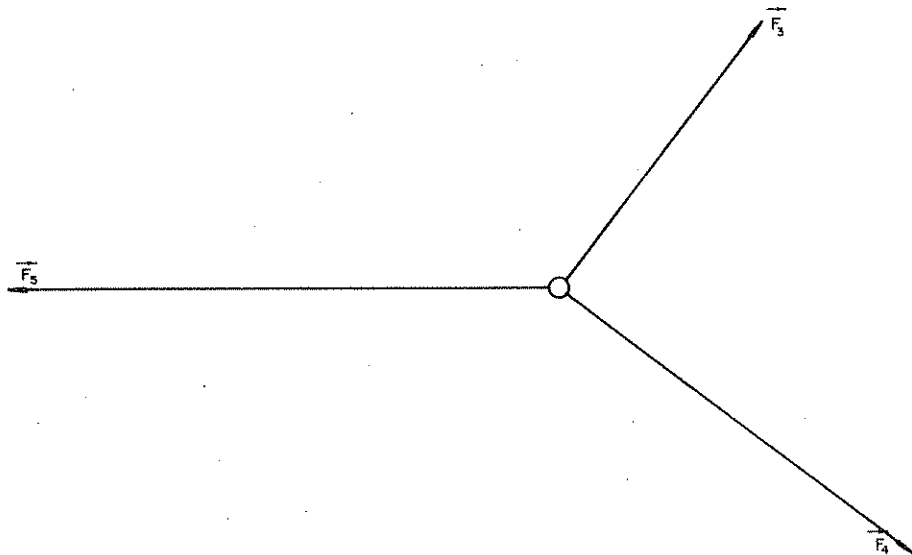



Figura IX-19

A fôrça $\vec{F}_5$ é exercida sôbre a argola pelo sistema A. Ela é dirigida para a esquerda e seu módulo é 5UF.

A fôrça $\vec{F}_4$ é exercida pelo sistema C. Seu módulo é 4UF. Essa fôrça é a mesma que a representada na Fig. IX-16.

A fôrça $\vec{F}_3$ é exercida pelo sistema D. Seu módulo é 3UF. Ela também é idêntica à representada na Fig. IX-16.

Muito bem. Vimos que a soma vetorial de $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ é uma fôrça de 5UF dirigida para a direita. Mais precisamente, a soma de $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ é diretamente oposta à fôrça $\vec{F}_5$ da Fig. IX-19.

Você conclui então que a soma das fôrças $\vec{F}_5$ $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ que atuam sôbre a argola é nula.

Nêsse caso, a argola está em equilíbrio estático no referencial do Laboratório.

Uma partícula está em equilíbrio estático em determinado referencial se ela está em repouso nêsse referencial e se fôr nula a soma das fôrças que atuam sôbre ela.

Relendo tudo isto, eu me pergunto se ficou bem claro.

Tenho minhas dúvidas.

E Martins também.

MARTINS E EU

BEM, PROFESSOR, NÃO É TÃO RUIM COMO O SENHOR PENSA... MAS HÁ UMA COISA QUE ESTÁ MEIO CONFUSA: PODE HAVER REPOUSO SEM HAVER EQUILÍBRIO ESTÁTICO?

PODE! A LAPISEIRA DA APOLO-9 ESTAVA EM REPOUSO NO REFERENCIAL DA NAVE, MAS NÃO ESTAVA EM EQUILÍBRIO ESTÁTICO...

????

...PORQUE A SOMA DAS FÔRÇAS EXERCIDAS SÔBRE A LAPISEIRA NÃO ERA NULA. MAS, NÊSSE PONTO, VOCÊ TEM QUE ME ACREDITAR SOB PALAVRA.
É OUTRA VEZ O CAPITULO XVIII QUE NOS EXPLICARÁ ISSO.

MAS O QUÊ É QUE É ESSA MÁGICA? BORRACHA, ARGOLA, LAPISEIRA, ESTAVAM TÔDAS AS TRÊS EM REPOUSO NOS SEUS RESPECTIVOS REFERENCIAIS. PORQUE SERÁ ENTÃO QUE SÒMENTE A BORRACHA E A ARGOLA ESTAVAM EM EQUILÍBRIO ESTÁTICO E A LAPISEIRA NÃO?

BEM...

HÁ ALGO MUITO IMPORTANTE QUE PRECISAMOS ENTENDER DÊSDE JÁ. QUANDO EU DEFINO EQUILÍBRIO ESTÁTICO PELA CONDIÇÃO QUE A SOMA DAS FÔRÇAS SEJA NULA, RESTRINJO A POSSIBILIDADE DE EQUILÍBRIO A CERTOS REFERENCIAIS PRIVILEGIADOS... NO PRÓXIMO CAPÍTULO ESCLAREÇO MELHOR ISTO!

MAS A APOLO-9 NÃO ERA UM REFERENCIAL PRIVILEGIADO, É ISTO?

PERFEITAMENTE!

E COMO É QUE VAMOS SABER AGORA SE OS REFERENCIAIS EM QUE FAZEMOS EXPERIÊNCIAS SÃO PRIVILEGIADOS OU NÃO?
PORQUE NESTE CAPÍTULO SÒMENTE TRABALHAMOS NO LABORATÓRIO OU NO ESCRITÓRIO OU NA SALA DE AULA.

TUDO QUE É LIGADO À TERRA É REFERENCIAL PRIVILEGIADO EM PRIMEIRA APROXIMAÇÃO... DE MANEIRA QUE SE OBSERVAMOS NÊSSES REFERENCIAIS PRIVILEGIADOS UMA PARTÍCULA EM REPOUSO, PODEREMOS AFIRMAR QUE ELA ESTÁ EM EQUILÍBRIO ESTÁTICO...

IX-4-2 Condição de equilíbrio estático da partícula.

A rigor essa seção seria desnecessária.

Tudo foi dito na anterior.

Enunciemos então:

No Laboratório, ou em qualquer referencial "privilegiado", - no sentido que será precisado no Capítulo X - uma partícula em repouso está em equilíbrio estático.

Se uma partícula está em equilíbrio estático, a soma das fôrças exercidas sôbre ela é nula.

A tradução matemática dessa condição é

$$\boxed{\Sigma \vec{F} = 0} \qquad \text{(IX-1)}$$

Aplique isto logo ao caso de uma partícula submetida a duas fôrças.

Como é que são essas duas fôrças se a partícula está em equilíbrio estático?

Em têrmos de componentes, a condição (IX-1) substitui-se no plano por um conjunto de duas equações (seriam três no espaço):

$$\boxed{\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0} \qquad \text{(IX-2)}$$

Como você já adivinhou, F_x é a componente - x de qualquer fôrça e F_y é a componente - y.

Os problemas sôbre equilíbrio da partícula são sempre fáceis. O mais difícil é reconhecer quais são as fôrças que agem. Mas aos poucos você irá se acostumando.

Já sabemos que elásticos exercem fôrças.

E tudo o que é capaz de puxar, ou empurrar, ou sustentar a partícula.

Sustentar?... Espere aí. Acho que vale a pena investigar isto de um pouco mais perto.

IX-4 Mais uma experiência com elásticos.

Repitamos uma experiência que fizemos juntos no primeiro Capítulo dêste curso.

Estávamos falando dos elefantes do Pequeno Príncipe, você se lembra? Grudados ao seu planêta pela atração gravitacional.

Amarramos uma pedra a um elástico e suspendemos a pedra como na

Figura IX-20.

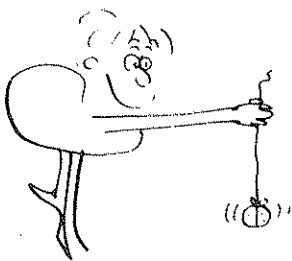



Figura IX-20

O elástico está alongado.

E a pedra está em repouso em um referencial privilegiado.

Ah! então a pedra está em equilíbrio estático.

A soma das fôrças deve ser nula.

Martins representou a pedra na Figura IX-21 com a fôrça $\vec{F}$ exercida pelo elástico.

Figura IX-21

Você está de acôrdo que essa fôrça é vertical e dirigida para cima, não é? Olhe para o elástico...

Ótimo! A pedra...

CATÁSTROFE!

Só tem uma fôrça que age sôbre a pedra?!

Mas isso não é possível!

Como é que vamos ter uma soma nula com uma fôrça só?

Está faltando uma fôrça!

Está faltando a fôrça que puxa a pedra para baixo, e que equilibra a fôrça exercida pelo elástico, que puxa a pedra para cima.

O que é que está puxando a pedra para baixo?

Não há elástico, não há mola... e no entanto há algo que está puxando esta pedra.

O que está puxando a pedra para baixo é a Terra.

Mas por quê?

IX-5 Massa gravitacional.

Por que é que a Terra está atraindo a pedra?

Por que é que a Terra nos mantém "grudados" na sua superfície?

Por que é que o planêta do Pequeno Príncipe segura os seus elefantes?

Não sei.

Ninguém sabe.

O Capítulo XVII nos encontrará estudando a interação gravitacional.

Falaremos de coisas um pouco mais complicadas. Da Lua e dos satélites artificiais. E do movimento dos comêtas e dos planêtas.

Mas à indagação: "por que será que a Terra atrai a Lua como ela atrai a Apolo 10 e por que será que a Lua atrai o módulo lunar da Apolo 11?", a resposta ainda será a mesma:

Não sabemos.

Felizmente, foi-se o tempo em que a Física pensava poder explicar tudo.

Quando não entende ela se contenta, humildemente, em observar, em estudar o comportamento do que ela não entende.

Não se deixe iludir.

Quando eu lhe digo que a Terra atrai a pedra, e que recìprocamente a pedra atrai a Terra, por causa de uma propriedade intrínseca de qualquer matéria, de qualquer objeto, e que se chama sua massa gravitacional, eu sòmente tento esconder minha ignorância com palavras.

Por que é que o ópio faz dormir, perguntava um chinês a outro chinês?

Porque o ópio possui uma virtude "dormitiva" respondia o segundo chinês.

O que evidentemente explicava tudo...

Muito bem. A massa gravitacional de um corpo caracteriza a sua propriedade de "atratibilidade".

Qualquer objeto material atrai e é atraído por qualquer outro.

Mas essa atração sòmente é sensível aos aparelhos comuns - nosso elástico por exemplo - se pelo menos um dos objetos tiver... as dimensões... e o conteúdo... a substância... da Terra, ou da Lua.

Ou do asteróide do Pequeno Príncipe.

Você reparou minha hesitação em caracterizar a Terra, ou a Lua? Ou o asteróide?

Quase disse "...se pelo menos um dos objetos tiver a massa..."

Tipo do círculo vicioso.

Não é tão fácil evitá-lo.

Como é que se mede a massa gravitacional?

Antes de responder a essa pergunta, devemos certificar-nos que se trata realmente de uma propriedade permanente e repetitiva.

Em outros têrmos, temos que verificar se a atração da Terra sôbre

essa pedra será amanhã a mesma que ela é hoje, e a mesma que era ontem.

Pois se por acaso a massa gravitacional "envelhecesse", não seria realmente de grande utilidade, não acha?

Pare aqui e responda às perguntas seguintes:

1) Como é que você faria para certificar-se que a massa gravitacional realmente não envelhece?

   (Não é uma pergunta fácil. Não lhe darei resposta aqui. Discuta êsse assunto em aula).

2) Eu disse que se a massa gravitacional envelhecesse, não seria de grande utilidade.

   Pensando bem, eu acho essa afirmação criticável.

   O que é que <u>você</u> acha?

Admitamos então como fato que a massa gravitacional é uma propriedade realmente intrínseca de qualquer corpo.

Admitamos que é uma propriedade <u>essencial</u>.

E façamos a experiência seguinte (Fig. IX-22):

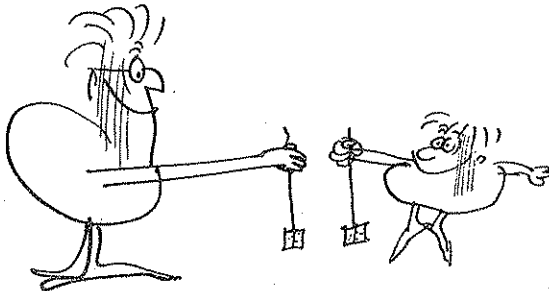
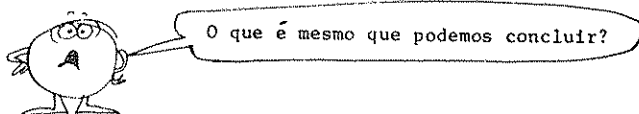



Figura IX-22

Martins e eu temos dois elásticos idênticos.

Amarro uma pedra ao meu, e o Martins outra pedra ao dêle.

Observamos que os dois elásticos alongam-se igualmente.

Concluímos que...

Certo! Concluímos que a Terra atrai igualmente ambas as pedras.

Diremos por definição que as pedras têm a mesma massa gravitacional.

Acho que ninguém vai se assustar muito com isso, não é?

Ótimo! E agora outra experiência (Fig. IX-23).

Quebro a minha pedra em dois... três... quatro pedaços e suspendo os pedaços ao meu elástico.

Adivinhe o que acontece?

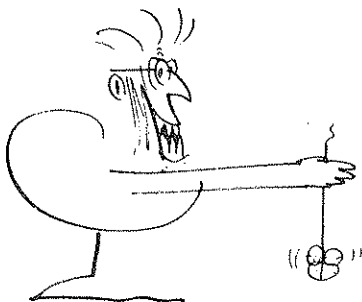



Figura IX-23

Heim? Evidente!

O elástico alonga-se da mesma quantidade.

O que realmente não é de espantar.

Mas a conclusão que isso nos impõe é que a massa gravitacional é a-

ditiva.

Isto é, a soma das massas das partes é igual à massa do conjunto.

E temos agora um método operacional de medir massas gravitacionais.

Mas fazia muito tempo que nosso jovem amigo não se manifestava...

MARTINS E EU

O QUE É SÈVRES?
É UM LUGAR PERTO DE PARIS ONDE CONSERVAM TODOS OS PADRÕES INTERNACIONAIS DE MEDIDAS!

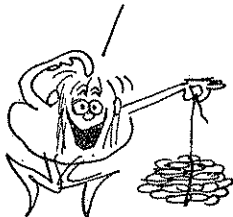
VOCÊ SEGURA UM ELÁSTICO E EU SEGURO OUTRO IGUAL. EU SUSPENDO O QUILOGRAMA PADRÃO A MEU ELÁSTICO. E VOCÊ SUSPENDE A LAPISEIRA AO SEU...
MAS NÃO ALONGA IGUAL!

ENTÃO VÁ SUSPENDENDO OUTRA LAPISEIRA IDÊNTICA... E OUTRA... E MAIS OUTRA... ATÉ QUE O ALONGAMENTO DO SEU ELÁSTICO SEJA IGUAL AO ALONGAMENTO DO MEU...

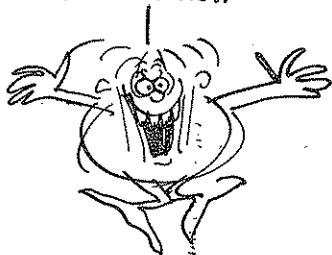
JÁ DÁ!

VÁ CONCLUINDO MARTINS!

PELA 1ª EXPERIÊNCIA QUE O SENHOR FÊZ, A MASSA DÊSSE MONTE DE LAPISEIRAS É IGUAL À UM QUILOGRAMA.

E PELA SEGUNDA EXPERIÊNCIA, A MASSA DO MONTE DE LAPISEIRAS É IGUAL À SOMA DAS MASSAS DE TÔDAS AS LAPISEIRAS.

QUANTAS SÃO?

47...
48...
49...
50!
DE MODO QUE A MASSA DE UMA LAPISEIRA E...

20 GRAMAS!!

VOCÊ VAI LONGE _ MARTINS! MAS NÃO SE ESQUEÇA MESMO ASSIM DE FAZER O PROBLEMA IX-29!

A massa gravitacional de um corpo mede-se comparando a atração que a Terra exerce sôbre o corpo com a atração que a Terra exerce - no mesmo lugar - sôbre o quilograma-padrão.

Você sabe evidentemente que a comparação não se faz com elásticos.

A comparação se faz com balanças. E não pretendo entrar no assunto balanças. O que nos interessa nêsse nível é aprender conceitos e não técnica.

De modo que vamos encerrar, pelo menos provisòriamente, o caso massa gravitacional.

Marcando desde já encontro no Capítulo X em que voltaremos a tratar do assunto.

Ah! mas não é que ia esquecendo mesmo!

Massa é grandeza escalar?

Acho que você já havia concluído há muito tempo.

Um número só é suficiente para medir a massa: o quilo de arroz, as vinte gramas da lapiseira...

Sim. A massa gravitacional é uma grandeza escalar.

IX-6 Pêso.

IX-6-1 Definição.

Na experiência das Fig. IX-20 e IX-21 Martins tinha ficado muito sustado sòmente ao pensar que uma fôrça só - a exercida pelo elástico - po se exercer sôbre uma pedra em equilíbrio estático.

Isto òbviamente não é possível.

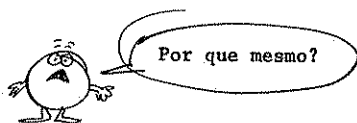
Mas agora sabemos que há realmente duas fôrças.

A fôrça $\vec{F}$ exercida pelo elástico.

E a fôrça de atração gravitacional $\vec{P}$ exercida pela Terra (Figura IX-24).

Figura IX-24

A essa fôrça dá-se o nome de <u>pêso</u>.

O pêso $\vec{P}$ da pedra é diretamente oposto à fôrça $\vec{F}$ exercida pelo elástico.

Assim sendo, o pêso da pedra, como de qualquer outro objeto, é uma fôrça vertical e dirigida para baixo.

IX-6-2 <u>Qual é o par ação-reação</u>?

A Terra atrai a pedra.

A pedra atrai a Terra.

A Terra e a Lua atraem-se mùtuamente.

Acho que você não terá muita dificuldade em admitir a simetria da a

tração mútua.

Concluindo que se a Terra atrai a pedra com a fôrça $\vec{P}$ (pêso da pedra), a pedra atrai a Terra com a fôrça $-\vec{P}$. (Fig. IX-25).

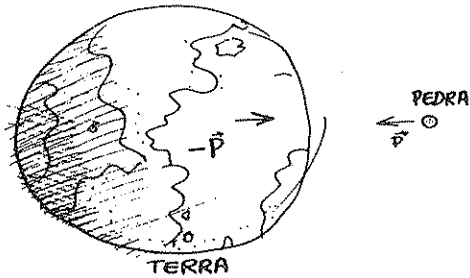



Figura IX-25

As fôrças $\{\vec{P} \quad -\vec{P}\}$ constituem um par ação-reação.

IX-6-3 Como se mede o pêso?

Voltemos à experiência da pedra suspensa ao elástico.

A que o Martins fêz na Fig. IX-20 e que eu repito a seguir, na Figura IX-26.

A Terra puxa a pedra para baixo, e por causa disto a pedra alonga o elástico.

O elástico reage e puxa a pedra para cima. Por causa disto a pedra está em equilíbrio estático.

Figura IX-26

A Fig. IX-27, que repete a IX-24, mostra as duas fôrças $\vec{F}$ e $\vec{P}$.

Figura IX-27

A condição de equilíbrio escreve-se:

$$\vec{F} + \vec{P} = 0 \rightarrow \vec{P} = -\vec{F} \qquad \text{(IX-3)}$$

O que é que podemos medir?

O pêso $\vec{P}$?

NÃO!

O que podemos medir é a fôrça $\vec{F}$, pelo alongamento do elástico.

Medimos a fôrça $\vec{F}$, e dessa medida deduzimos o valor de $\vec{P}$. Dizemos: o pêso é diretamente oposto à fôrça $\vec{F}$ que eu acabo de medir.

Suponha que você suspende uma pedra a um dos elásticos padrões que utilizamos no início do Capítulo.

Você observa e diz: $\vec{F}$ tem módulo igual a 3UF.

Muito bem, respondo; então o pêso da pedra tem módulo também igual a 3UF.

Não é mesmo curioso que nunca se mede estàticamente o pêso de um objeto?

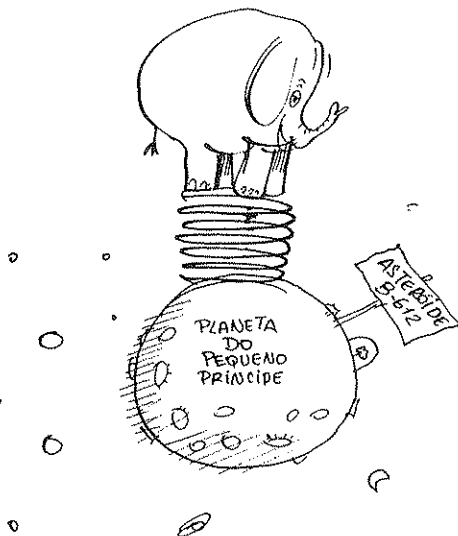



Figura IX-28

Na Fig. IX-28 tento mostrar como o Pequeno Príncipe poderia medir o pêso de um de seus elefantes.

Êle mediria o "achatamento" da mola, o que lhe forneceria o módulo da fôrça $\vec{F}$ exercida pela mola sôbre o elefante (Fig. IX-29).

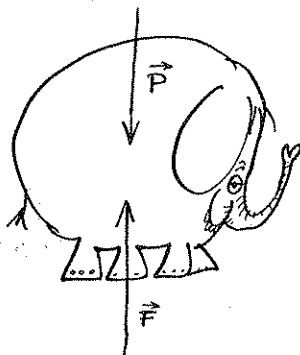



Figura IX-29

E daí concluiria que o pêso $\vec{P}$, exercido pelo planêta sôbre o elefante, tem o mesmo módulo que $\vec{F}$.

É sempre a mesma coisa.

O que se mede é <u>sempre</u> a fôrça <u>oposta</u> ao pêso... e que impede o objeto de cair.

IX-6-4 <u>Unidade de pêso</u>.

Em que unidade se mede o pêso?

Bem, eu não posso criticar o Martins por querer medir o pêso em UF.

Até aqui medimos tôdas as nossas fôrças em UF. E desde que o pêso é uma fôrça...

No entanto, sabemos que a UF é uma unidade de brincadeira.

Serviu sòmente para que nos acostumemos sem muita dificuldade ao conceito de fôrça, de equilíbrio...

Mas duvido que um congresso internacional de Físicos reconheça a UF.

De maneira que vamos ter que adotar mesmo a unidade utilizada por tôda a comunidade científica.

Essa unidade é o Newton (*).

O Newton é a unidade de fôrça do sistema internacional. Êle se abrevia por N.

Mas não adianta dar uma unidade sem termos uma idéia do que aquilo representa.

Uma batata de tamanho normal pesa aproximadamente um Newton.

Ou dois ou três maços de cigarros juntos.

Ou a areia que enche a sua mão, na praia.

(*) Você encontrará algumas notas biográficas sôbre Newton em Apêndice ao Capítulo X.

IX-6-5 Pêso e massa gravitacional.

O pêso é a fôrça exercida pela Terra sôbre um corpo por causa da sua massa gravitacional.

Não confunda causa com efeito.

Massa gravitacional é uma grandeza que caracteriza intrinsicamente qualquer objeto, qualquer corpo.

A massa gravitacional de uma partícula é inseparável da própria existência da partícula.

Enquanto que o pêso sòmente se manifesta se a partícula estiver em presença da Terra ou de qualquer outro corpo celeste.

A lapiseira que o Astronauta leva na Apolo 9 tem massa gravitacional de 20 gramas, talvez.

Ou, se preferir, de 2×10^{-2}kg.

A massa gravitacional da lapiseira do Astronauta é igual a 2×10^{-2}kg aquí, na China, na Apolo 9, na Lua ou na estrêla α do Centauro.

O pêso, a atração da Terra sôbre a lapiseira, é talvez 0,2 N.

Mas a atração gravitacional da Lua - o pêso lunar - será seis vêzes menor, quando o Astronauta, já pisando a superfície do nosso satélite, utilisar a lapiseira para descrever em têrmos líricos "aquela Terra tôda azul suspensa no céu..."

E o pêso da lapiseira será nulo, na espaçonave do ano 2001, "desamarrada" do sistema solar e deslizando uniformemente em direção de α do Centauro.

E não esqueça evidentemente que a massa gravitacional é uma grandeza escalar, enquanto que o pêso é uma grandeza vetorial.

Mas dizer que não deva confundir massa e pêso não significa que não haja relação entre essas duas grandezas.

Essa relação é muito simples. Ela se deduz do próprio modo operacional utilizado para medir a massa.

Suspenda uma pedra a um elástico: pêso de um Newton (em módulo).

Suspenda outra pedra idêntica à primeira: precisará de outro elástico idêntico ao precedente e utilizado em paralelo. Os dois elásticos se alongam da mesma quantidade que o fazia o elástico único na primeira experiência

Você diz: o pêso dobrou. Mas a massa também.

Somos então obrigados a concluir que *o pêso de uma partícula é proporcional a sua massa*.

O coeficiente de proporcionalidade deve transformr a grandeza escalar massa gravitacional (que representaremos pelo símbolo m_g) em grandeza vetorial: o pêso $\vec{P}$.

Assim sendo, êsse coeficiente de proporcionalidade deve ser êle mesmo uma grandeza vetorial, não é mesmo?

Você se lembra que no Capítulo VI, quando aprendemos a lidar com vetores, vimos que a multiplicação de um vetor por um escalar fornece um vetor?

Pois bem; representemos o coeficiente de proporcionalidade por $\vec{k}$ e escrevamos:

$$\boxed{\vec{P} = m_g \vec{k}} \qquad \text{(IX-4)}$$

$\vec{k}$ é uma constante que deve caracterizar...

Pare!

E fique por um momento meditando sôbre essa pergunta:

A constante $\vec{k}$ deve caracterizar o quê?

Vamos lá! Onde está a sua intuição física?

Ótimo!...

...que deve caracterizar o corpo que atrai gravitacionalmente a partícula de massa m_g, claro!

Para saber o valor de $\vec{k}$, deveriamos poder medir independentemente a massa e o pêso de um corpo.

Não temos nenhum meio, nesta altura, de fazer essas medidas.

O Capítulo XVII mostrará que o coeficiente $\vec{k}$ é precisamente igual à aceleração $\vec{g}$ da gravidade na superfície da Terra.

Ou aliás em qualquer lugar em que se mede o pêso.

Não é mesmo interessante?

Ah! concordo que não há nada que nos permita prever êsse resultado, no momento.

A não ser talvez o fato que $\vec{g}$ caracteriza efetivamente o corpo que atrai gravitacionalmente a partícula...

A relação (IX-4) passa então a ser:

$$\boxed{\vec{P} = m_g \vec{g}} \qquad \text{(IX-5)}$$

Sabemos que na superfície da Terra o módulo de $\vec{g}$ vale 9,8 m/s^2.

Segue-se que o pêso do quilograma-padrão é 1,0kg x 9,8m/s^2 = 9,8 N.

IX-7 Volta ao equilíbrio estático da partícula.

IX-7-1 Não esqueçamos o pêso...

As experiências que fazemos nêste Capítulo se passam no Laboratório ou na sala de aula.

Isto é, na superfície da Terra.

Então, por favor; NÃO esqueça o pêso da particula!

Quando você procura as fôrças existents , tenha sempre em mente que o pêso é uma dessas fôrças.

O que não significa que necessàriamente você o levará em consideração, pois êle pode ser desprezível em comparação com as outras fôrças.

Você está vendo? Nem é mais preciso perguntar!

Pois é. Na experiência que eu fiz na seção IX-4, utilizei uma argola à qual amarrei três conjuntos de elásticos.

Era a experiência da fotografia da Fig. IX-14.

Ao analisar o equilíbrio da argola, nem mencionei o pêso dentro das fôrças em presença.

É que as fôrças exercidas pelos elásticos eram tão grandes em comparação com êsse pêso que êle desapareceria literalmente na faixa de incerteza das minhas medidas.

Mas de qualquer maneira, não esqueça o pêso.

IX-7-2 <u>Análise macroscópica de um equilíbrio estático.</u>

Um livro esté em repouso sôbre minha mesa de trabalho.

Repouso... referencial privilegiado... Equilíbrio estático!

Equilíbrio estático?... $\Sigma\vec{F} = 0$.

Vejamos como isto funciona.

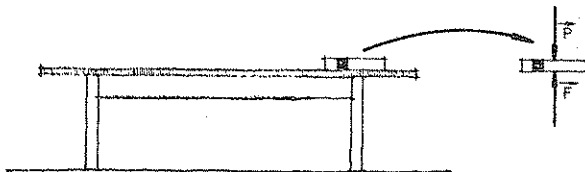



Figura IX-30

Na Fig. IX-30 eu representei o livro sôbre a mesa e, à direita, o livro "isolado".

O que significa "isolar" um corpo?

É representar o corpo sòzinho, substituindo o resto do Universo pelas fôrças que êle exerce sôbre o corpo.

Não esqueça com efeito que um corpo sòmente "conhece" outro pelas fôrças que êste outro exerce por ventura sôbre êle.

Ora o livro conhece o quê?

A Terra em primeiro lugar... pêso $\vec{P}$.

Que mais? A mesa, acho. Se êle está pousado sôbre a mesa êle deve deformar a superfície da mesa e por sua vez ser deformado por ela.

Se há deformação há fôrça.

Em que direção essa fôrça?

Para cima, claro!

A mesa <u>sustenta</u> o livro por baixo. Não se sustenta por baixo puxando, e sim empurrando.

Empurrando para cima... fôrça $\vec{F}$.

Você já adivinhou que $\vec{F} = -\vec{P}$ não é?

A fôrça $\vec{F}$ é às vêzes chamada "reação" da mesa sôbre o livro.

$\vec{F}$ e $\vec{P}$ constituem um par ação-reação?

É a segunda vez que lhe faço essa pergunta, não é mesmo?

Analisando o equilíbrio estático do livro achamos que a fôrça $\vec{F}$ exercida pela mesa tem módulo igual ao pêso.

Não quero falar por você, mas da minha parte gostaria de entender tudo isto um pouco melhor.

Refiro-me ao seguinte: a Física que estuda as propriedades dos sólidos - a chamada Física do Estado Sólido - ensina que livro e mesa são constituídos por átomos ou moléculas mais ou menos regularmente "arrumados" em camadas sucessivas.

Mas com uma certa <u>distância</u> entre camadas.

O pêso $\vec{P}$ do livro é a soma dos pêsos de tôdas as suas moléculas.

E a mesa exerce sôbre o livro uma fôrça diretamente oposta a $\vec{P}$.

O que eu gostaria de entender é o seguinte: como é que a mesa pode tomar conhecimento das camadas superiores das molcuulas do livro, de modo a incluir <u>também</u> o pêso dessas camadas superiores no seu comportamento para com o livro?

Você não acha extraordinário?

Veja a Fig. IX-31. É uma grosseira simplificação dos fatos, mas serve para meu objetivo.

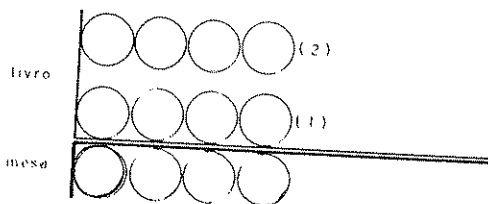



Figura IX-31

Entendo a rigor que a mesa possa tomar conhecimento da primeira camada das moléculas do livro.

Mas por quê cargas d'água vai ela se incomodar com a camada (2), lá em cima?

Para tentarmos entender isto, precisamos primeiro ter uma idéia das fôrças que agem entre átomos ou moléculas, em um sólido.

IX-7-3 Fôrças entre moléculas de um sólido.

As fôrças que agem entre duas moléculas (ou dois átomos) de um sólido têm geralmente um comportamento semelhante ao representado no gráfico da Fig. IX-32.

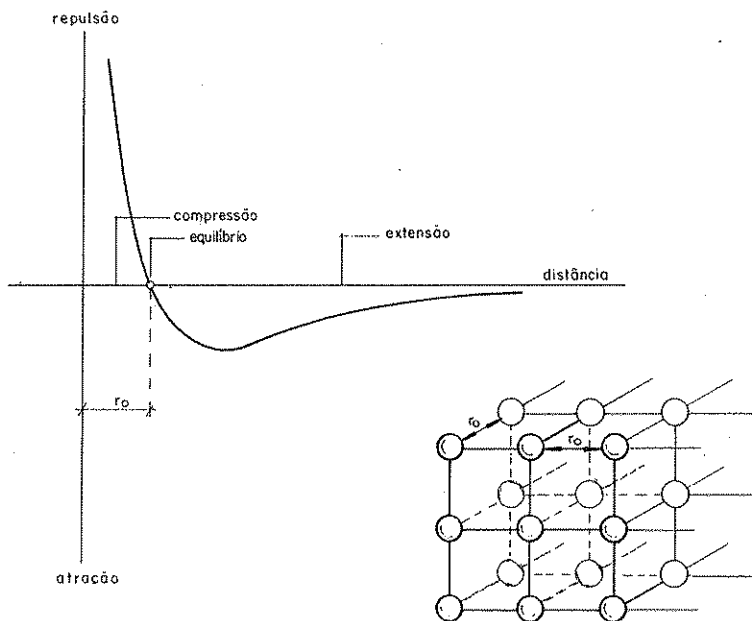
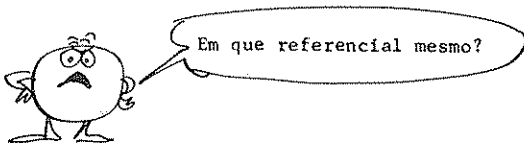



Figura IX-32

Observe o modêlo de estrutura cristalina na mesma Figura.
As moléculas distam normalmente entre si da distância r_o.
Nessas condições as moléculas estão em equilíbrio estático.

A fôrça resultante que age sôbre cada uma delas é nula.

Suponha que você queira afastar as moléculas umas das outras. Aumentando a distância r_o, nascem fôrças de atração (ramo do gráfico abaixo do eixo horizontal) que tendem a fazer voltar a distância intermolecular ao seu valor de equilíbrio r_o.

Se pelo contrário você comprime o sólido, querendo diminuir a distância r_o, nascem fôrças de repulsão (ramo do gráfico acima do eixo horizontal) que também tendem a fazer voltar a distância intermolecular ao valor r_o.

Em resumo: distâncias maiores que r_o → fôrças de atração.

distância menores que r_o → fôrças de repulsão.

Voltemos então a nossa experiência, encarando-a agora sob o ponto de vista microscópico.

IX-7-4 Análise microscópica do equilíbrio.

A Figura IX-33 lhe propõe mais uma vez um modêlo grosseiro do conjunto Terra - Mesa - Livro.

As "moléculas" 0 1 2 3 4 são as moléculas do conjunto Terra-mesa.

(6)
r_{56}
d_6
livro
(5)
r_{45}
d_5
livro
(4)
d
d
r_{34}
(3)
(2)
mesa + terra
mesa + terra
(1)
(0)
CENTRO da TERRA(?!)
(6)
r_{56}
(5)
r_{45}
(4)
r_{34}
(3)
(2)
(1)
(0)
GRAVIDADE "DESLIGADA"
GRAVIDADE "LIGADA"

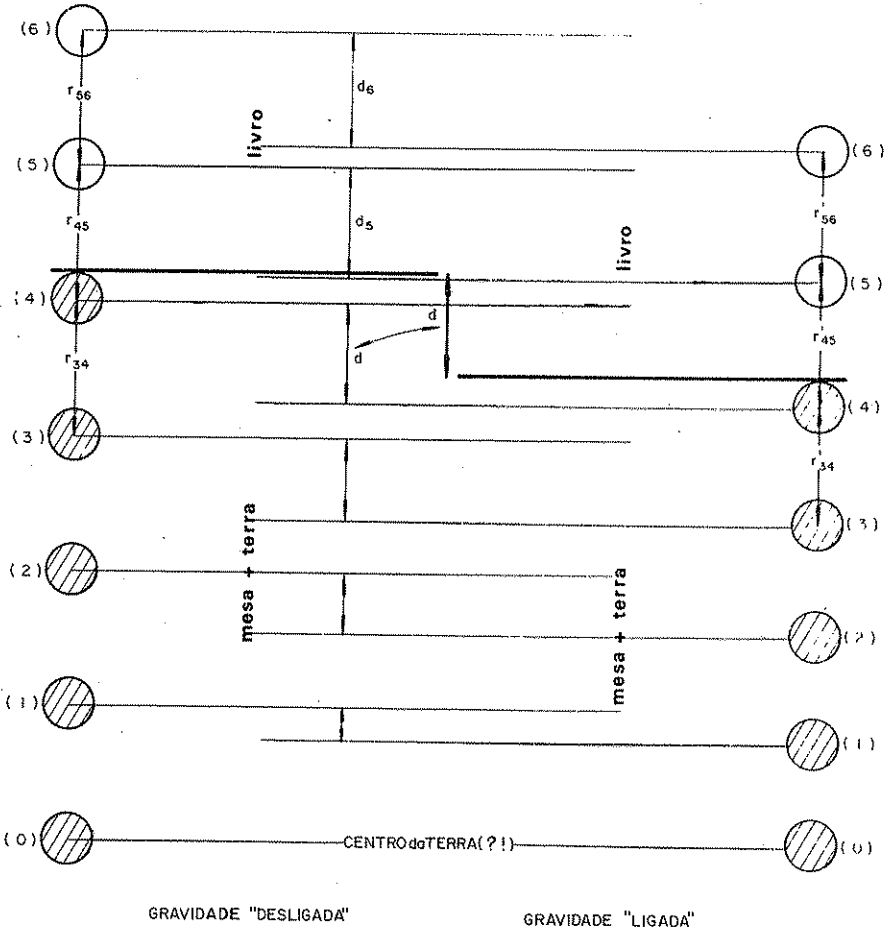
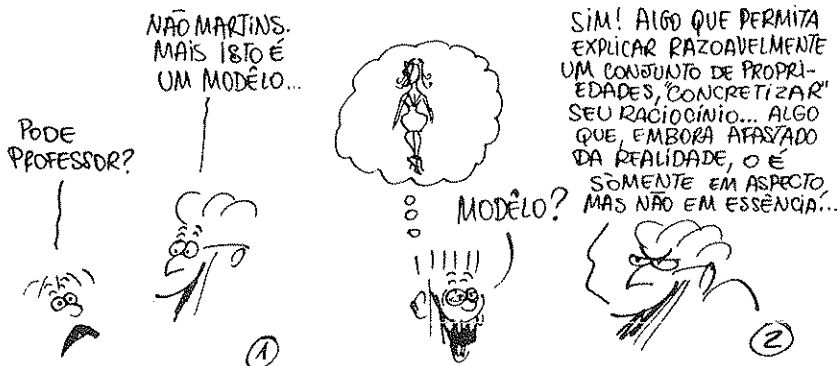



Figura IX-33

As "moléculas" 5   6 são as "moléculas" do livro.

Suponha primeiro que por um toque de mágica possamos "desligar" o campo gravitacional...

Estava dizendo que, se pudessemos "desligar" a gravidade, tôdas as moléculas distariam entre si de $\underline{r_o}$, como do lado esquerdo da Fig. IX-33:

$$r_{56} = r_{45} = r_{34} = \ldots = r_{01} \equiv \underline{r_o}. \ (^*)$$

Se agora "ligarmos" a gravidade, as moléculas vão cair. Não é mesmo?

Vão cair com exceção da que está no centro da Terra (em que direção iria, coitada? Heim?).

A molécula (6) cai de d_6; a molécula (5) cai de d_5; a molécula (4) cai de d_4... e assim por diante. Como na parte da direita da Fig. IX-33.

Tudo vai caindo... até que na re-arrumação um novo estado de equilí

(*) É bem verdade que o $\underline{r_o}$ das moléculas da Terra é diferente do $\underline{r_o}$ das moléculas da mesa, e do $\underline{r_o}$ das moléculas do livro. Mas isto é um detalhe irrelevante no modêlo...

brio seja atingido.

Fixemos nossa atenção sôbre as moléculas 6 5 e 4.

A molécula (6) está agora submetida a seu pêso $\vec{p}$.

Mas com ela continua em equilíbrio, há necessàriamente outra fôrça $\vec{f} = -\vec{p}$ que age sôbre ela.

Quem exerce a fôrça $\vec{f}$? A molécula vizinha, isto é a molécula (5).

Como? Porque na rearrumação geral que se seguiu à "ligação" da gravidade, a distância r'_{56} entre as moléculas (6) e (5) passou a ser <u>menor</u> que r_o.

Daí nasceu a fôrça de repulsão $\vec{f}$ exercida pela molécula (5) sôbre a molécula (6). A Fig. IX-34 mostra isto.

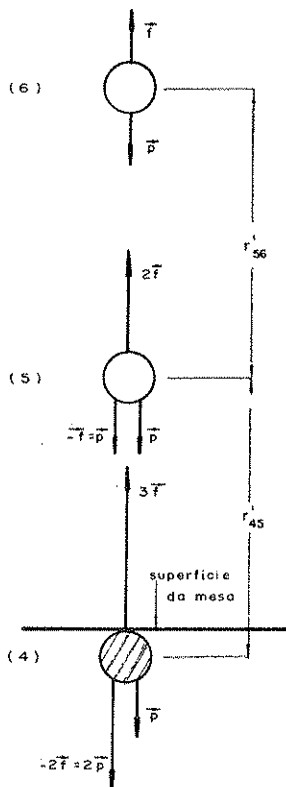
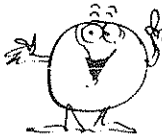



Figura IX-34

Passemos à molécula (5).

Agem: - o pêso $\vec{p}$ da molécula.

- a fôrça $-\vec{f}$ exercida pela molécula (6), pois o par $(\vec{f}\ \ -\vec{f})$ deve constituir um par ação-reação. Mas sendo $\vec{f} = -\vec{p}$, $-\vec{f} = \vec{p}$. De modo que já temos, agindo para baixo sôbre a molécula (5) a soma $\vec{p} + \vec{p} = 2\vec{p}$.
- mas a molécula (5) está em equilíbrio, de modo que a molécula (4) <u>deve</u> exercer sôbre ela uma fôrça $2\vec{f}$ dirigida para cima. De acôrdo?

E agora vamos à molécula (4), a primeira molécula da mesa.

Agem: - o pêso $\vec{p}$ da molécula.

- a fôrça $-2\vec{f}$ exercida pela molécula (5), pois o par $(2\vec{f}\ \ -2\vec{f})$ deve constituir um par ação-reação. Mas sendo $\vec{f} = -\vec{p}$, $-2\vec{f} = 2\vec{p}$. De modo que já temos, agindo para baixo sôbre a molécula (4) a soma $2\vec{p} + \vec{p} = 3\vec{p}$.
- mas a molécula (4) está em equilíbrio, de modo que a molécula (3) <u>deve</u> exercer sôbre ela uma fôrça $3\vec{f}$ dirigida para cima.

O que importa é que por causa da rearrumação devida à gravidade, a primeira molécula da mesa "sente" não sòmente o seu próprio pêso $\vec{p}$ como também o pêso $2\vec{p}$ <u>das moléculas do livro que estão por cima dela</u>.

E você observa, voltando à Fig. IX-34, que a deformação da mesa, representada no nosso modêlo pelo "afundamento" <u>d</u> da sua superfície, é função do pêso $2\vec{p}$ das moléculas do livro.

Medindo <u>d</u> poderemos deduzir o pêso do livro.

Na realidade <u>d</u> é muito pequeno, muito difícil de medir.

Se quiséssemos medir o pêso do livro escolheríamos algo que se deforme mais fàcilmente que uma mesa.

Uma mola por exemplo.

Entendemos também como é produzida, microscòpicamente, a reação $\vec{F}$ da mesa sôbre o livro, encontrada na análise macroscópica da Fig. IX-31.

Voltando à Fig. IX-35 você observa sem dificuldade que a reação macroscópica $\vec{F}$ é a fôrça $2\vec{f}$ exercida pela <u>primeira</u> molécula da mesa sôbre a <u>última</u> molécula do livro.

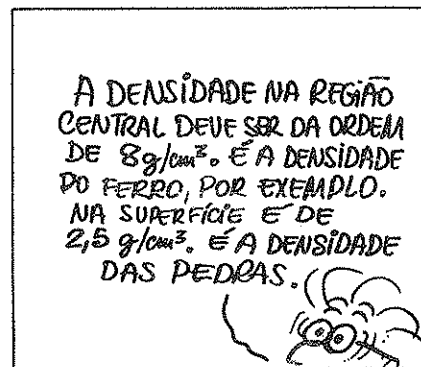
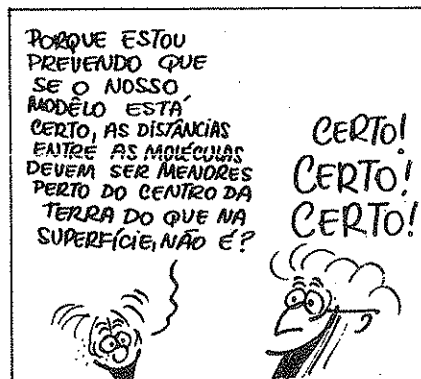
E $2\vec{f} = -2\vec{p}$ o que é a tradução da condição de equilíbrio macroscópico $\vec{F} = -\vec{P}$.

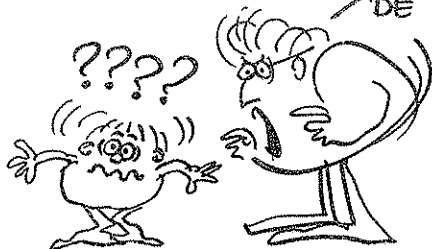
Òbviamente, na maioria das aplicações práticas, você analisará macroscòpicamente os equilíbrios.

Mas não custa nada entender o que está acontecendo.

Nunca se sabe se um dia não precisaremos dessa compreensão mais profunda do fenômeno.

E mesmo sem precisar... é muito mais satisfatório entender. Não acha?

A DENSIDADE NA REGIÃO CENTRAL DEVE SER DA ORDEM DE 8 g/cm³. É A DENSIDADE DO FERRO, POR EXEMPLO. NA SUPERFÍCIE É DE 2,5 g/cm³. É A DENSIDADE DAS PEDRAS.

MAS ISTO NÃO É NADA. EM CERTAS ESTRÊLAS AINDA EM PROCESSO DE "COLAPSO GRAVITACIONAL"...

SÃO ESTRÊLAS EM QUE A MATÉRIA CONTINUA CAINDO PARA O CENTRO. POIS BEM, NESSAS ESTRELAS A DENSIDADE NO CENTRO PODE ATINGIR O VALOR FANTÁSTICO DE 10^6 g/cm^3!

IX-7-5 <u>Outro exemplo de equilíbrio estático</u>.

O tipo de lanterna representado na Fig. IX-36 é muito comum nas casas de campo.

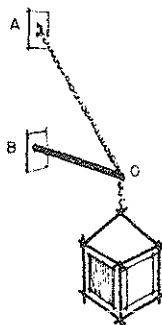



Figura IX-36

A lanterna tem massa igual a 10 kg.

O sistema de suspensão é constituído pela corrente OA e pela haste OB, sendo de 45^{o} a inclinação da corrente sôbre a horizontal.

Eu gostaria de conhecer a fôrça exercida sôbre a corrente.

Vamos aprender juntos a resolver êsse problema.

Começo por substituir o desenho artístico da Fig. IX-36 pelo esquema técnico da Fig. IX-37.

A seguir, "isolo" a junção O da corrente OA, da haste OB e da corrente que sustenta a lantrrna.

Represento logo abaixo essa junção O, substituindo o resto do Universo pelas fôrças exercidas.

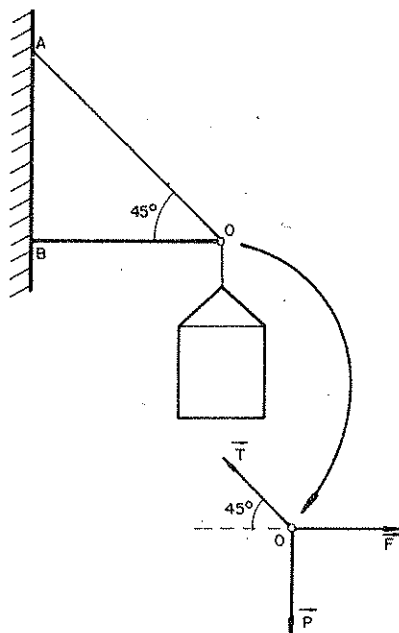



Figura IX-37

Quais são essas fôrças?

- o pêso $\vec{P}$ da lanterna.
- a tração $\vec{T}$ exercida pela corrente OA.
- a fôrça $\vec{F}$ exercida pela haste OB.

Você tem alguma dúvida a respeito dessa fôrça $\vec{F}$?

Veja: a haste OB está <u>empurrando</u> a junção O para a direita, não é mesmo? Então a fôrça $\vec{F}$ deve ser horizontal (direção da haste) e dirigida para a direita.

Muito bem, temos agora a junção O isolada.

O que vamos fazer?

É simples: vamos escrever que a junção O está em equilíbrio estático, sendo consequentemente nula a soma das fôrças exercidas.

Como escrever que a soma das fôrças é nula?

Há várias maneiras. Aí vão as duas mais comuns:

<u>1a.</u> <u>maneira</u>: Ela consiste em construir geomètricamente a resultante das fôrças aplicadas, obrigando-a a ser nula.

A partir de um ponto arbitrário M (Fig. IX-38) construo primeiro a fôrça $\vec{F}$ (ou melhor: o segmento orientado que representa a fôrça $\vec{F}$), a seguir, a fôrça $\vec{P}$ e finalmente a fôrça $\vec{T}$.

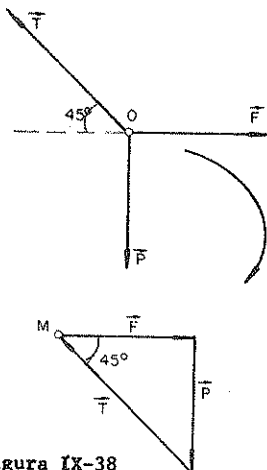
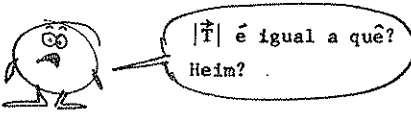



Figura IX-38

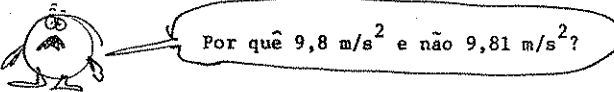
Sendo nula a soma dessas três fôrças, a extremidade do segmento que representa $\vec{T}$ <u>deve</u> <u>coincidir</u> <u>com</u> <u>M</u>.

De acôrdo?

Em outros têrmos: os segmentos que representam as três fôrças são os três lados de um triângulo.

Acontece por coincidência que êsse triângulo é retângulo isósceles e que, imediatamente $|\vec{T}|$ = ...

Certo! $|\vec{T}| = |\vec{P}|\sqrt{2}$.

Vamos ao cálculo numérico.

Sendo 10kg a massa da lanterna, o pêso é 10 x 9,8 = 98 N.

Então $|\vec{T}| = 98 \times 1{,}41 = 1{,}4 \times 10^2$ N.

A fôrça exercida pela corrente sôbre a junção é a tração $\vec{T}$.

Ação e reação: a junção por sua vez traciona a corrente com uma fôrça igual a $-\vec{T}$.

O papel dessa fôrça é manter a corrente tensa. Sob <u>tensão</u>.

A tensão de uma corrente, de uma corda... é um <u>estado mecânico</u> produzido por uma fôrça de tração.

Confunde-se às vêzes o efeito e a causa e diz-se:... "a tensão da corrente é $1{,}4 \times 10^2$N".

<u>2a</u>. <u>Maneira</u>: Ela conduz <u>sempre</u> ao resultado, desde que você saiba expressar as componentes cartesianas de um vetor.

Construa um sistema de eixos retangulares com origem em O.

Que sistema?

Mas o mais simples possível!

O eixo Ox oo longo de $\vec{F}$.

O eixo Oy ao longo de $\vec{P}$.

Veja a Fig. IX-39 e entenderá sem dificuldade.

Projete tôdas as fôrças sôbre o eixo Ox, lembrando-se que, desde que há equilíbrio, $\Sigma F_x = 0$:

$$|\vec{F}| - |\vec{T}|\cos 45^{\circ} = 0 \qquad \text{(IX-6)}$$

Projete tôdas as fôrças sôbre o eixo Oy, lembrando-se que, desde que há equilíbrio, $\Sigma F_y = 0$:

$$|\vec{T}|\cos 45 - |\vec{P}| = 0 \qquad \text{(IX-7)}$$

Peço sòmente o valor de $|\vec{T}|$. Você não precisa da equação (IX-6).

A equação (IX-7) se escreve numèricamente:

$$|\vec{T}| \ \frac{\sqrt{2}}{2} - 98 = 0 \rightarrow |\vec{T}| = 1{,}4 \times 10^2 \text{ N.}$$

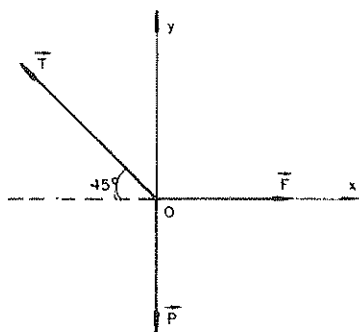



Figura IX-39

O SENHOR COMEÇA O CAPITULO FALANDO DE ACELERAÇÃO...

E ACABA FALANDO SÒMENTE DE EQUILIBRIO, DE FÔRÇAS ESTÁTICAS... O SENHOR NÃO DISSE QUE FÔRÇAS PRODUZEM ACELERAÇÕES?

DISSE! VEREMOS ISSO NO CAPITULO XIII. VOCÊ ENTENDEU MARTINS QUE PARA HAVER EQUILIBRIO ESTÁTICO É PRECISO QUE PELO MENOS DUAS FÔRÇAS ATUEM SÔBRE A PARTICULA?

JÁ SEI! É PORQUE $\Sigma\vec{F}=0$!
E ISSO SÒMENTE É POSSIVEL SE HOUVER PELO MENOS DUAS FÔRÇAS...

POIS BEM. SE HOUVER SÒMENTE UMA FÔRÇA, OU SE DE UM MODO GERAL, A RESULTANTE DAS FÔRÇAS QUE ATUAM NÃO FÔR NULA... ENTÃO NÃO HAVERÁ EQUILIBRIO ESTÁTICO... A PARTICULA SERÁ ACELERADA.

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas "estrelados" (*) devem ser discutidos em aula com seu Professor).

IX-1 Volte a pensar no movimento da Terra na sua órbita em tôrno do Sol, e da velocidade escalar dêsse movimento. Você já calculou essa velocidade e achou que ela é da ordem de 30km/s.

Medite sôbre êsse fato, em correlação com o que eu afirmo na seção IX-1:..."é a aceleração, e não a velocidade, que realmente importa no movimento de uma partícula".

IX-2 Enumere, comentando-as ràpidamente, algumas atividades diárias em que você exerce fôrças. Tente caracterizar essas fôrças (empurrar? puxar? sustentar?).

*IX-3 Volte ao olhar em tôrno de si. Há provàvelmente, no seu ambiente familiar, objetos deformados por fôrças, e que por sua vez exercem fôrças sôbre outros objetos.

A deformação pode ser bem visível... ou quase que imperceptível.

Comente alguns exemplos.

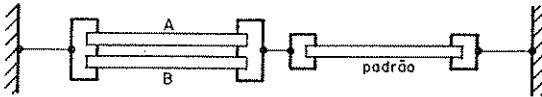
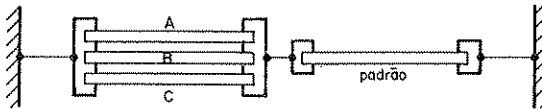
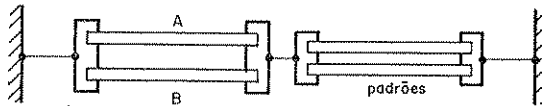
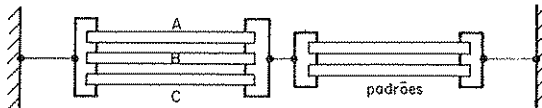
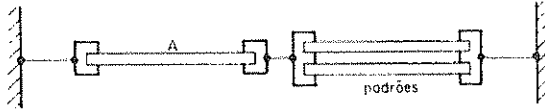
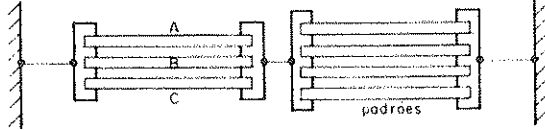
*IX-4 Faça a seguinte experiência: amarre uns cinco ou seis elásticos de escritório um a seguir do outro, prenda uma pedra, ou uma batata razoàvelmente grande numa extremidade, e suspenda o conjunto pela outra (o encosto de uma cadeira serve).

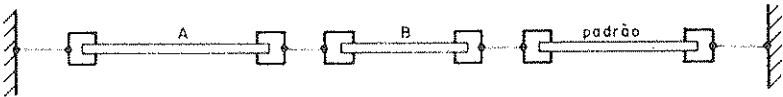
Meça o comprimento do elástico assim esticado.

Deixe passar a noite e meça de novo o comprimento do elástico na manhã seguinte.

Comente os resultados de suas medidas.

IX-5 O "elástico padrão" dêste exercício é idêntico ao que foi utilizado na seção IX-3-2 para definir a UF.

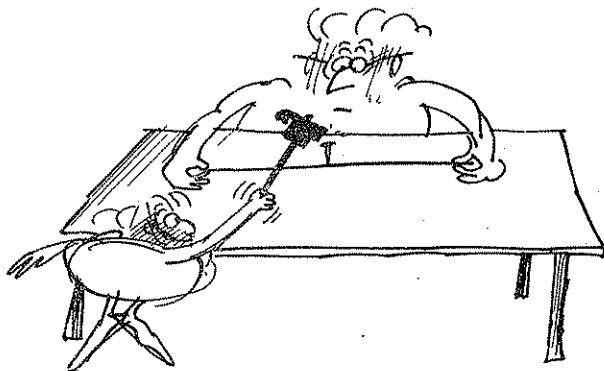
Os elásticos A e B são idênticos entre si.
Alonga-se o padrão até que êle indique 1UF.
Quais são as fôrças exercidas sôbre os elásticos A e B?

IX-6 Exercício semelhante ao precedente. O padrão indica 1UF. Quais são as fôrças exercidas sôbre os elásticos idênticos A B C?

IX-7 Exercício semelhante ao precedente. Os padrões indicam 1UF cada um. Quais são as fôrças exercidas sôbre os elásticos idênticos A e B?

IX-8 Exercício semelhante ao precedente. Os padrões indicam 1UF cada um. Quais são as fôrças exercidas sôbre os elásticos idênticos A B C?

IX-9 Exercício semelhante ao precedente. Os padrões indicam 1UF cada um. Qual é a fôrça exercida sôbre o elástico A?

IX-9 Exercício semelhante ao precedente. Os padrões indicam 1UF cada um. Quais são as fôrças exercidas sôbre os elásticos idênticos A B C?

IX-10 Exercício semelhante ao precedente. O padrão indica 1UF. Quais são as fôrças exercidas sôbre os elásticos idênticos A e B?

IX-11 Exercício semelhante ao precedente. O padrão indica 1UF. Os dados são suficientes para determinar as fôrças exercidas sôbre os elásticos <u>diferentes</u> A e B?

IX-12 Exercício semelhante ao precedente. Os padrões indicam 1UF cada um. Qual é a fôrça exercida sôbre o elástico A?

IX-13 Eu seguro um elástico esticado sôbre uma mesa e peço ao Martins de pregar o meio do elástico na mesa.

Suponha que antes do elástico ser pregado, eu estava exercendo fôrças de 3UF nas extremidades.

Se eu não alterar as posições das minhas mãos quais são as fôrças que exerço depois do elástico ser pregado na mesa?

Quais são as fôrças exercidas pelo elástico sôbre o prego?

IX-14 Responda às mesmas perguntas que no exercício precedente supondo porém que o elástico é pregado a $\frac{1}{3}$ do comprimento a partir de uma extremidade.

*IX-15 Você observou provàvelmente que para exercer fôrças de 2, 3, 4...UF, utilizo 2, 3, 4... padrões "em paralelo", que alongo sempre do mesmo comprimento, em vez de utilizar <u>um só</u> elástico, que alongaria talvez 2, 3, 4... vêzes mais.

Medite sôbre as possíveis razões que me levaram a essa decisão.

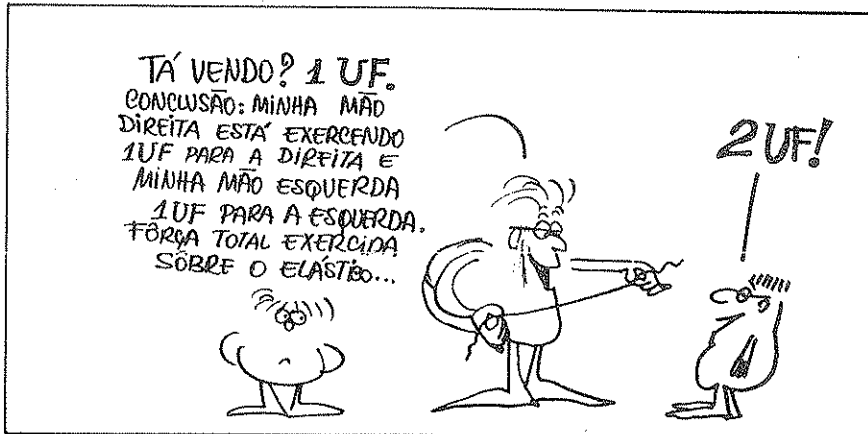
IX-16 Em tôdas as situações descritas nos exercícios IX-5 a IX-12, ache as fôrças exercidas pelos suportes fixos (à direita e à esquerda) sôbre os sistemas de elásticos amarrados a êles.

Ache também as fôrças exercidas por êsses sistemas de elásticos sôbre os suportes.

IX-17 Se você fêz os exercícios IX-5 a IX-12 /escalarmente", repita-os representando as fôrças exercidas por segmentos orientados.

IX-18 Se você fêz os exercícios IX-13 e IX-14 "escalarmente", repita-os representando as fôrças exercidas por segmentos orientados.

IX-19 Se você fêz o exercício IX-16 "escalarmente", repita-o reoresentando as fôrças exercidas por segmentos orientados.

IX-20

IX-21 Você estica um elástico padrão com as duas mãos: 1UF em cada extremidade (mas como são os vetores?)

Você agora amarra uma das extremidades a uma parede e estica com a mão até o padrão alongar da mesma quantidade.

Qual é a fôrça exercida pela sua mão?

*IX-22 Na seção IX-3-4 discutimos o caráter vetorial das fôrças estáticas.

Ache, nas suas atividades diárias, alguns exemplos que mostram também, êsse caráter vetorial.

*IX-23 Volte à experiência da Fig. IX-14. Estude cuidadosamente a fotografia e responda às seguintes perguntas:

a) Qual é a faixa de incerteza (em percentagem) dentro da qual eu posso afirmar que os comprimentos dos três sistemas são iguais?
b) Faça você mesmo a partir da Fig. IX-14, a construção vetorial que eu fiz na Fig. IX-16. Afirmei naquela oportunidade que a resultante de $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ é $\vec{F}_5$. Qual é a faixa de incerteza? E a propósito: o que é que eu posso querer dizer ao falar de faixa de incerteza <u>para vetores</u>, heim?

IX-24 Em ambos os exercícios propostos a seguir, uma argolinha está submetida à ação de elásticos, os quais por sua vez estão prêsos a uma prancheta por meio de alfinêtes.

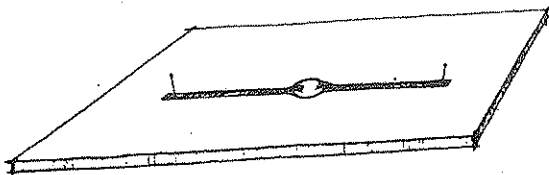
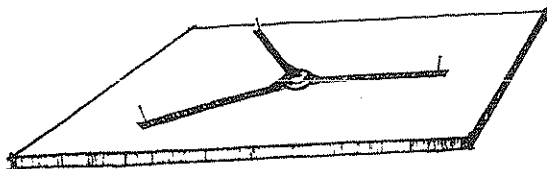
Em cada exercício complete o par ação-reação para:

a) as fôrças exercidas pelos elásticos sôbre a argola.

b) as fôrças exercidas pelos elásticos sôbre os alfinêtes.

Representa cada par ação-reação por segmentos orientados convenien-

temente dispostos.

1)

2)

X-25 Ache a resultante dos seguintes sistemas de fôrças. Cada um dêsses sistemas é aplicado a uma partícula.

Quando houver possibilidade de equilíbrio estático, assinale-o.

(Lembre-se que, sendo $\vec{R}$ a resultante,

$$\vec{R}_x = \Sigma F_x \qquad \vec{R}_y = \Sigma F_y).$$

1)

2 UF 2 UF
4 UF

2)

4 UF 3 UF
5 UF 4 UF

3)

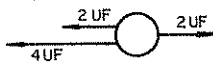
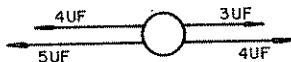
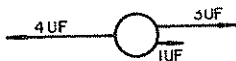
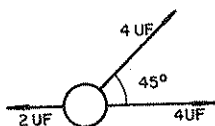
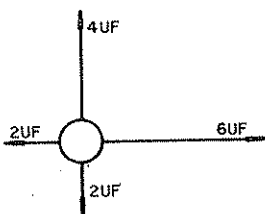
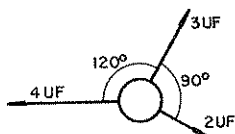
4)

4 UF
45°
2 UF 4 UF

5)

4 UF
2 UF 6 UF
2 UF

6)

3 UF
120° 90°
4 UF
2 UF

IX-26 Nos seis casos seguintes, a partícula está submetida ao sistema de fôrças representado.

Qual é a fôrça que você teria que acrescentar, em cada caso, para que haja possibilidade de equilíbrio estático?

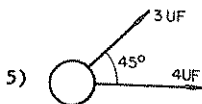
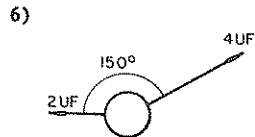
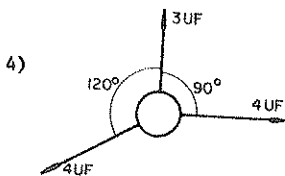
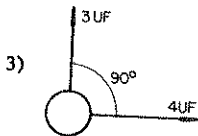
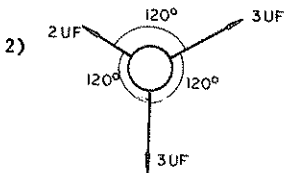
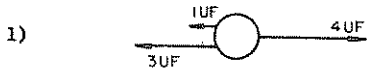
1) 1UF 4UF 3UF

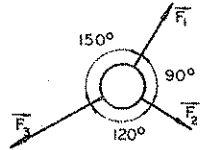
2) 120° 3UF 2UF 120° 120° 3UF

3) 3UF 90° 4UF

4)

6)

5)

*IX-27 As fôrças $\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$ $\vec{F}_3$ representadas na figura agem sôbre uma partícula em equilíbrio estático.

Ache três números proporcionais aos módulos das fôrças $\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$ $\vec{F}_3$.

(Sugestão: em qualquer triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Mas você já sabia disso, não é?).

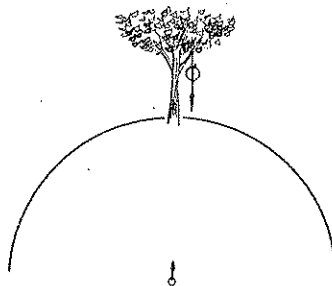
*IX-28 Prove que se uma partícula é submetida a três fôrças de módulos iguais a condição necessária e suficiente de equilíbrio é que as fôrças façam entre si ângulos de 120°.

*IX-29 Refira-se à experiência da seção IX-5 em que Martins mediu a massa da lapiseira com o quilograma-padrão de Sèvres.

a) Escrevi que a massa da lapiseira é vinte gramas. Ponha isso com o número correto de algarismos significativos.

b) Tivemos sorte que o Martins possuísse 50 lapiseiras idênticas. E se não as tivesse?...

*IX-30 Pense um pouco no que eu lhe disse na seção IX-6-2 a respeito da simetria da atração Terra-pedra.

Suponha que uma pedra esteja suspensa ao galho de uma árvore, como no desenho ao lado; suponha também que a fôrça exercida pela Terra sôbre a pedra seja maior que a fôrça exercida pela pedra sôbre a Terra...

Você não acha que as Apolo 10 11... tornar-se-iam obsoletas?

IX-31 Calcule, em Newton, o pêso de um corpo cuja massa é:

a) 2,3kg;
b) 4,2kg;
c) 0,8kg;
d) $1,2 \times 10^3$kg;
e) $3,2 \times 10^{-4}$kg.

IX-32 Calcule, em Newton, o pêso de um eletron. A massa de um eletron é 9,1 x x 10^{-31}kg.

*IX-33 Você achou no Problema II-26 que o Universo deve conter ao todo uns 10^{85} protons. Sendo a massa do proton $1,7 \times 10^{-27}$kg, qual é a ordem de grandeza do pêso do Universo (CUIDADO por favor! pense bem antes de responder).

IX-34 Calculo que no asteróide B-612, o asteróide do Pequeno Príncipe, a aceleração da gravidade deve ser da ordem de $1cm/s^2$. A massa do Pequeno Príncipe é talvez de uns 30kg.

Qual é o seu pêso, quando está no seu Planêta?

*IX-35 Tente responder à seguinte pergunta:

A Terra tem atmosfera. A Lua não tem.

Por quê?

(Você está ainda longe de conhecer todos os elementos necessários para responder com tranquilidade a essa pergunta. Mas você deve ter pelo menos alguma idéia. Tente!)

*IX-36 No final da seção IX-6-3, eu disse que o que mede uma balança não é realmente o pêso e sim a "fôrça que impede o corpo de cair".

Medite de novo sôbre isso e você poderá provàvelmente responder à seguinte pergunta:

Se alguém estieesse em pé sôbre uma balança de mola (tipo balança

de banheiro) situado em um elevador <u>em queda livre</u> qual é o pêso que êle leria na balança?

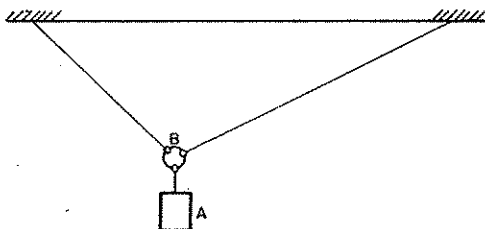
(Supondo evidentemente que nas condições da experiência o infeliz estivesse ainda preocupado com seu pêso!)

*IX-37 Leia de novo com atenção a seção IX-7-3. Construa então um modêlo de um elástico esticado, supondo que as fôrças exercidas nas extremidades são <u>muito</u> maiores que o pêso do elástico.

Você entende agora porque, ao cortar um elástico, as fôrças que devem ser exercidas no lugar do corte sôbre cada pedaço devem ter mesmo módulo que as fôrças exercidas nas extremidades, se não quisermos modificar o estado de tensão do material?

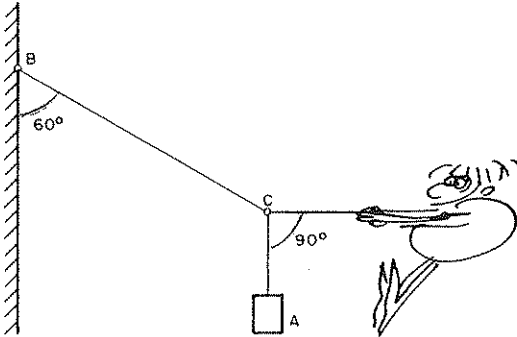
*IX-38 Na base do modêlo da seção IX-7-3, explique porque, estando em pé, você se sente mais "comprimido" nas pernas que na cabeça.

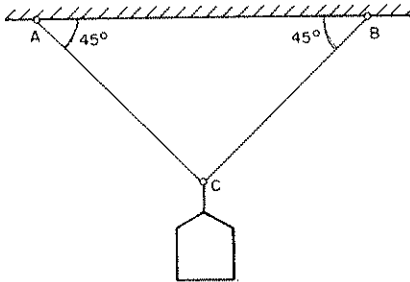
E se você "plantar bananeira"?

IX-39 Isole o corpo A e a argola B, supondo-a de pêso desprezível.

IX-40 O Martins está puxando horizontalmente sôbre o nó C.

O corpo A pesa $1,0 \times 10^2$N.

Qual é a fôrça exercida por Martins?

Qual é a tração exercida pela corda CB sôbre a parede?

IX-41 Qual é a tração exercida pelas cordas AC e BC sôbre a junção C?

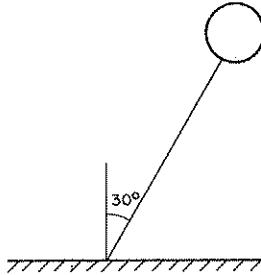
O pêso da lanterna é 50 N.

IX-42 Um balão está prêso a uma corda.

Um vento horizontal empurra o balão, obrigando a corda a inclinar--se de 30° em relação à vertical.

O pêso do balão é 1 N. A tração exercida pela corda tem módulo igual a 2 N.

Além do pêso, da tração exercida pela corda e da fôrça horizontal exercida pelo vento, o balão sofre um "empuxo" vertical e dirigido para cima,

exercido pelo ar (*).

Calcule o módulo do empuxo e o da fôrça exercida pelo vento.

IX-43 Volte à figura do Problema IX-41:

Como deveria dispor as cordas se você desejar que as trações respectivas tenham módulo iguais a:

a) 50 N e 50 N;
b) 30 N e 40 N;
c) 30 N e 10 N;
d) 40 N e $1,0 \times 10^2$ N?

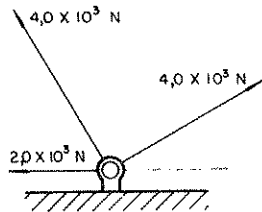
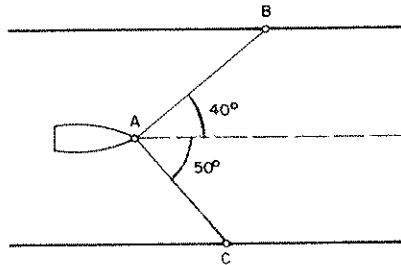
*IX-44 Escrevi na seção IX-7-5, a propósito do conceito de tensão de uma corda ou de uma corrente:

"...confunde-se às vêzes o efeito e a causa e diz-se: a tensão da corrente é $1,4 \times 10^2$N".

A tensão passa a ser então uma grandeza escalar. Justifique conceitualmente isso.

IX-45 Um anel está prêso à base de ferro fundido de uma máquina. Ao anel estão prêsos três cabos de sustentação cujas tensões e direções estão indicadas na figura.

(*) Êsse empuxo é responsável pela subida do balão, quando largado. Peça a seu Professor que lhe fale de Arquimedes.

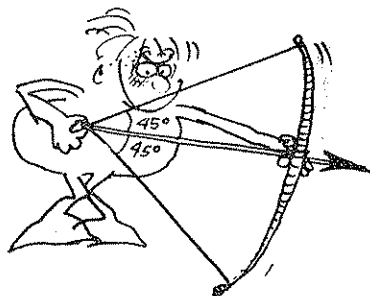
Qual é a fôrça exercida pela base sôbre o anel?

IX-46 Um barco está amarrado por duas cordas na correnteza de um rio, como mostra a figura.

A tensão da corda AB é 2×10^2N.

Qual é a fôrça exercida pela correnteza sôbre o barco? Qual é a tensão da corda AC?

IX-47 Brincando de Índio o Martins arma o arco. (Veja Figura).

A tensão da corda do arco é 2×10^2N.

Qual é a fôrça exercida pelo Martins sôbre a corda?

Sôbre o arco?

CAPÍTULO X

Primeira Lei de Newton - Referenciais inerciais

Conceito de massa inercial

X-1 Introdução.

Imagine, se puder, um Universo em que houvesse sòmente uma partícula.

Você pode argumentar que se houver sòmente uma partícula, ninguém poderá contar o que está acontecendo.

Mas podemos - talvez - imaginar que um "puro espírito" esteja estudando a Física dêsse Universo.

Essa Física seria realmente breve: ela se resumiria a uma Lei (que na realidade transformaremos em definição): a Primeira Lei de Newton.

O passo seguinte por ordem de dificuldade crescente é construirmos um Universo com duas partículas. Mas duas partículas que interagem.

Êsse Universo nos permitirá, nêsse Capítulo, chegar ao conceito de massa inercial... e nos Capítulos seguintes à tôda a estrutura fundamental da Mecânica.

Terminaremos o Capítulo identificando a massa inercial e a massa gravitacional de uma partícula.

X-2 Primeira Lei de Newton - Referenciais inerciais.

X-2-1 Partícula isolada.

Imagine uma partícula infinitamente longe de qualquer outra.

O "infinito" em Física é - felizmente - mais fácil de imaginar que em Matemática.

A Terra e α-Centauri distam 4,3 anos-luz. Acredita-se que não há experiência mecânica que permita, da Terra, detetar a presença da α-Centauri, e recìprocamente.

Do ponto de vista da mecânica, podemos considerar α-Centauri e a Terra como isoladas uma da outra.

Mas evidentemente a Terra não está isolada da Lua, ou do Sol.

Voltemos ao Laboratório. Há possibilidade de isolar uma partícula no Laboratório?

Não.

A razão é simples: a Terra está aqui pertinho. Na realidade, o Laboratório é parte dela.

De modo que o conceito de partícula isolada, a que ignoraria mecânicamente qualquer outra partícula, permanecerá algo abstrato.

Não se preocupe. É só um passo para alcançar a interação de duas partículas.

Um passo necessário, mas só um passo.

X-2-2 Primeira Lei de Newton (*).

Newton dizia: "qualquer corpo permanece no seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, a não ser que seja obrigado a mudar por fôrças exercidas sôbre êle".

Dizia ... em que época, a propósito?

Em 1686, data da primeira edição dos Principia!

Observe bem: ..."a não ser que seja obrigado a mudar por fôrças exercidas sôbre êle".

Ora não pode haver fôrças exercidas sôbre uma partícula isolada. Está de acôrdo?

Pois para que algo possa exercer fôrças sôbre a partícula é necessário que ela tome conhecimento - mecânicamente falando - dêsse algo.

O que não é o caso para uma partícula isolada.

De modo que deduzimos, do enunciado de Newton, que: "qualquer partícula isolada permanece no seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme".

Mas espere aí!

"...permanece no seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme"?

Em que referencial?

Òbviamente não em qualquer referencial!

Você se lembra da lapiseira do astronauta da Apolo 9, no Capítulo IX?

No referencial da nave a lapiseira estava em repouso. E no entanto a lapiseira não era uma partícula isolada.

(*) Você encontrará no Apêndice dêste Capítulo uma nota biográfica sôbre Newton.

Ela estava tão pouco isolada da Terra que ela estava em órbita, junto com a nave!

Por outro lado, o livro pousado na minha mesa está em repouso no referencial terrestre.

Isolado?...A bem dizer, não. Mas veja, a ação da Terra é equilibrada pela reação da mesa.

MARTINS E EU

E a propósito, se você nos explicasse qual é o par a que pertence a fôrça exercida pela Terra sôbre o livro?

E qual é o par a que pertence a fôrça exercida pela mesa sôbre o livro?

Mas onde é que estávamos? êsse Martins sabe ser irritante... Ah! já sei!

Estava dizendo que o livro pousado na mesa não está isolado.

E no entanto, se eu "desligasse" a gravidade, a fôrça exercida pela mesa anular-se-ia ao mesmo tempo que o pêso, certo?

E nessas condições o livro não poderia saber, mecânicamente, da existência da Terra nem da existência da mesa, e estaria isolado.

No primeiro caso, fôrça resultante nula.

No segundo, nenhuma fôrça.

Não é <u>um pouco</u> a mesma coisa?

Cuidado! Não aceite isso sem mais nem menos.

Macroscòpicamente, estou disposto a defender a tese que, para o livro, fôrça resultante nula e nenhuma fôrça é pràticamente a mesma coisa.

Pelo menos na experiência descrita (livro pousado sôbre a mesa).

Mas microscòpicamente?

Pense bem! E me diga se é realmente a mesma coisa...

Em resumo: a lapiseira da Apolo 9 estava em repouso no referencial da nave, sem estar isolada. Mas o livro da mesa, artificialmente isolado, está em repouso no referencial terrestre.

Conclusão?

É sòmente em certos referenciais que a Primeira Lei de Newton é válida.

Êsses referenciais são os referenciais "privilegiados" do Capítulo IX, os referenciais nos quais são possíveis os equilíbrios estáticos.

A Apolo 9 não é um referencial privilegiado.

A Primeira Lei de Newton não é válida no referencial da nave.

E nessa altura você vai evidentemente me perguntar: "muito bem, mas então <u>quais são</u> êsses referenciais privilegiados?"

Se eu lhe respondesse que são os referenciais nos quais é válida a Primeira Lei de Newton, você se sentiria muito frustrado?

Heim? Como? MARTINS!!

Mas o fato que não há outro jeito. Sinto muito!

Na realidade, você vê, não sabemos ao justo onde encontrar o referencial "cem por cento" privilegiado.

De modo que vamos modificar um pouco o enunciado original da Primeira Lei, transformando-a em postulado da existência dêsse famoso referen-

cial privilegiado.

<u>PRIMEIRA LEI DE NEWTON</u>: EXISTE UM REFERENCIAL NO QUAL UMA PARTÍCULA ISOLADA ESTÁ EM REPOUSO OU EM MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME.

Repare que, ao mesmo tempo, a Primeira Lei nos fornece um método operacional para achar um referencial "privilegiado". Assim que observarmos que, em determinado referencial, uma partícula isolada está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, pronto! Aí está nosso referencial!

X-2-3 Referenciais inerciais.

O referencial da Primeira Lei de Newton é chamado <u>referencial inercial</u>.

1a. PERGUNTA: Como encontrar um referencial inercial?
RESPOSTA: Mas seguindo escrupulosamente o que diz a Primeira Lei!

Isole artificialmente uma partícula (já que o isolamento real é impossível). Isto é, faça de modo que a soma das fôrças estáticas exercidas sôbre a partícula seja nula.

E procure o referencial no qual a partícula está em repouso, ou em movimento retilíneo uniforme.

Você terá seu referencial inercial.

Por exemplo, se eu amarro dois elásticos idênticos a uma argola e se eu estico o conjunto pelas extremidades como na Fig. X-1, a argola está em equilíbrio enquanto os alongamentos dos dois elásticos forem iguais.

E nessas condições a soma das fôrças exercidas sôbre a argola é nula.

De modo que o Laboratório, no qual eu faço a experiência, é um refe

rencial inercial.

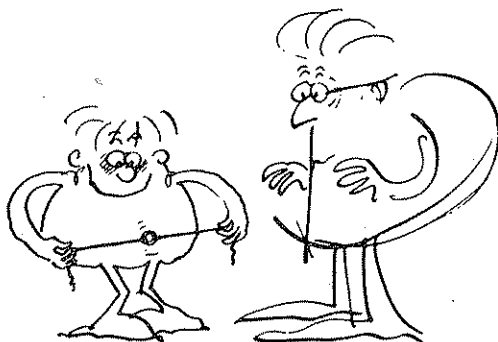
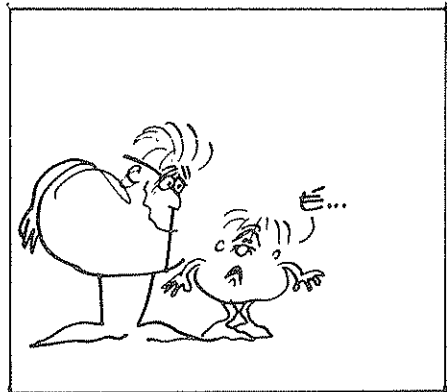



Figura X-1

E a Terra, na qual está construído o Laboratório, é um referencial inercial.

MARTINS E EU

2a. PERGUNTA: Tendo encontrado um referencial inercial, podemos encontrar outros?

Como? Mas evidentemente!

RESPOSTA: Todos os referenciais em <u>translação retilínea e uniforme</u> em relação a um referencial inercial são êles mesmos inerciais.

De modo que o problema do referencial inercial é <u>um só</u>: achar <u>um</u>. Tendo um, teremos quantos quisermos.

O Laboratório, ou melhor, a Terra, constitui um referencial mais que razoàvelmente inercial para a maioria das experiências que serão discutidas nêste livro.

E consequentemente qualquer referencial em translação retilínea e uniforme no Laboratório será êle mesmo um referencial inercial.

E no entanto... Você se lembra do problema do movimento dos projéteis no Capítulo VIII?

Ou mais simplesmente do problema da pedra que cai em queda livre?

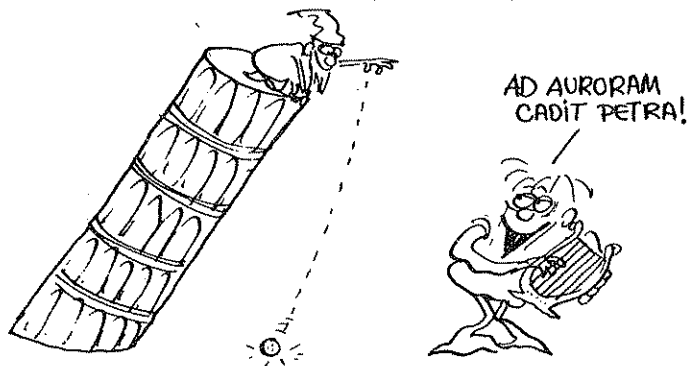



Figura X-2

Quando Galileu (*) deixava cair suas pedras do alto da Tôrre de Pisa, pensava êle que elas caiam verticalmente. Como nós todos pensamos.

Mas se reduzirmos a faixa de incerteza das nossas medidas, podemos mostrar experimentalmente que a pedra se desvia ligeiramente para Leste ao cair.

O desvio para Leste (devido à rotação diurna da Terra) é uma prova que a Terra não é um referencial tão fanàticamente inercial assim.

X-3 Interação unidimensional de duas partículas.

X-3-1 Quando uma partícuła encontra outra partícula...

Estamos no referencial inercial do Laboratório, e vamos brincar com os carrinhos que conhecemos desde o Capítulo IV.

Aquêles que deslizam sôbre um colchão de ar, por cima de uma calha.

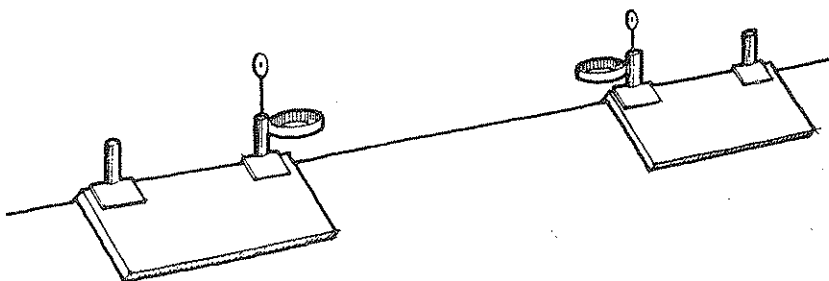
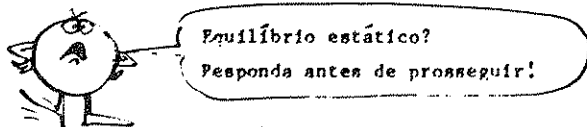



Figura X-3

(*) Notícia biográfica no Apêndice.

A calha está bem nivelada.

Coloco um carrinho sôbre a calha: êle permanece em repouso.

Sim! Equilíbrio estático, porque estamos em um referencial privilegiado. Em um referencial inercial.

O pêso $\vec{P}$ do carrinho e a fôrça $\vec{F}$ exercida pela calha são diretamente opostos.

Como mostra a Fig. X-4.

Eu sei que você conhece muito bem tudo isso, desde o Capítulo IX.

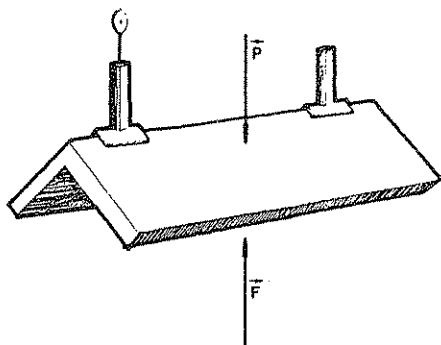



Figura X-4

Mas não custa nada relembrar um pouco...

Bom! mas o importante é ver que o carrinho está em repouso.

"Desliguemos" a gravidade! $\vec{P}$ e $\vec{F}$ anulam-se ao mesmo tempo.

O carrinho permanece em repouso, não acha?

Isolado, e em repouso em um referencial inercial.

Repito mais uma vez: isolado, e em repouso em um referencial inercial.

Mas espere aí! Isso que acabo de escrever não é, no fundo, a Primeira Lei de Newton?

Pois é!

Dou agora um empurrão ao carrinho: êle se põe em movimento ao longo da calha.

Que tipo de movimento?

Movimento retilíneo uniforme, claro.

Sempre pela Primeira Lei de Newton.

Bem, teremos logo mais oportunidade de verificar isso.

E vamos adiante!

Coloquemos um outro carrinho na calha.

Dois carrinhos em presença ... duas partículas.

E cada um dos carrinhos está provido de um "para-choque", como você pode ver no desenho da Fig. X-3.

Êsse para-choque é uma lâmina de aço em forma de circunferência.

O que é que vai acontecer agora, se pelo menos um dos carrinhos estiver em movimento em direção ao outro?

Você pode adivinhar sòzinho.

Enquanto os para-choques não se tocarem, os carrinhos ignoram-se mùtuamente.

Como se não tivessem sido apresentados um ao outro.

Ignoram-se mùtuamente? Mas então, cada um continua isolado, como se o outro não existisse, certo?

Ótimo! E a partir do momento em que os dois para-choques entram em contato?

Ah! evidentemente as coisas mudam de aspecto.

Cada carrinho - cada partícula - toma agora conhecimento da existência do outro.

E como é que, para nós, que estamos assistindo ao encontro, o carrinho manifesta que êle finalmente tomou conhecimento da existência do outro?

Como? Vamos lá! O que é que conhecemos, <u>mecânicamente falando</u>, do carrinho?

A sua Cinemática, claro.

Enquanto o carrinho está isolado: repouso ou movimento uniforme.

Assim que êle entra em contato com o outro:...

Complete você mesmo... A partir do momento em que um dos carrinhos entra em contato com o outro, o que acontece à velocidade até então uniforme?

...assim que êle entra em contato com o outro a sua velocidade varia.

TEM QUE VARIAR!

MARTINS E EU

O SENHOR ME PERDOA...

QUÊ QUE HÁ?
ÊSSE "TEM QUE VARIAR"...

TEM QUE VARIAR... POR DECRETO? OU O SENHOR TEM QUE ACREDITAR MESMO É NA EXPERIÊNCIA?

NA EXPERIÊNCIA MARTINS!

NA OUTRA PÁGINA VERÃO A FOTOGRAFIA ESTROBOSCÓPICA DO ENCONTRO DOS DOIS CARRINHOS!

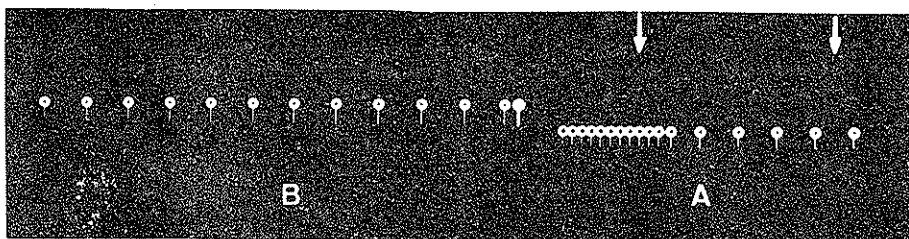



Figura X-5

Vejamos juntos o que aconteceu.

Um carrinho (vamos chamá-lo de "carrinho B") estava em repouso quase que no meio da calha.

Em repouso, despreocupado... isolado no referencial inercial.

A marca que êle deixou, enquanto permaneceu em repouso, é o disco branco mais apoiado, o primeiro da série superior a começar pela direita.

E o outro carrinho, o carrinho A, estava em movimento retilíneo uniforme, vindo da direita.

Em movimento retilíneo uniforme... êle também isolado no referencial inercial do Laboratório.

E êle deixou seu rastro: é a série inferior. Ou melhor, é o conjunto dos quatro primeiros pontos dessa série.

Em resumo: no início, até os carrinhos se encontrarem, um está em repouso e o outro em movimento retilíneo uniforme no referencial inercial do Laboratório.

Tudo de acôrdo com a Primeira Lei de Newton.

O intervalo de tempo que separa duas fotografias sucessivas é 1/20s.

Em que instante os carrinhos entram em contato?

Veja: na parte superior direita da fotografia da Fig. X-5 há duas setas brancas. A distância entre as pontas dessas setas é a distância em que se encontram os centros dos discos dos dois carrinhos quando os para-choques entram em contato.

Levando essa distância para a direita a partir do ponto branco central que representa a posição de repouso do carrinho B, vamos encontrar a posição do carrinho A no instante em que os carros se encontram, não é mesmo?

Pois bem, essa posição se encontra entre o quarto e o quinto ponto da série associada ao carrinho A.

E para que você possa seguir sem muita dificuldade eu representei a baixo, esquemàticamente, as duas séries de pontos e as correspondências de u ma série para outra. (Fig. X-6).

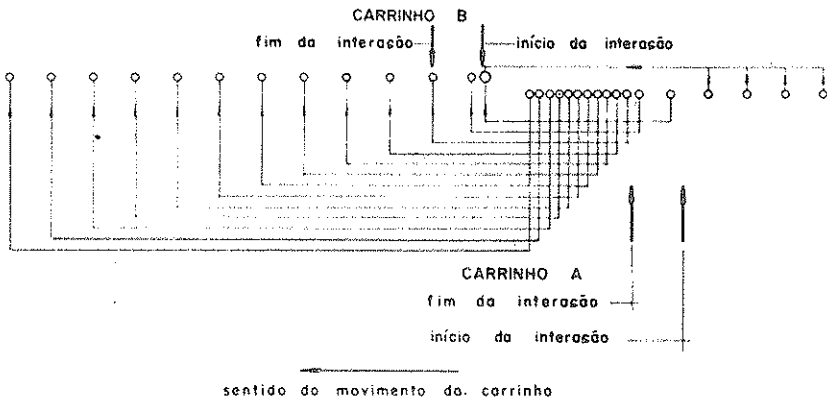



Figura X-6

Achar essas correspondências não é difícil.

Basta associar os dois últimos pontos a esquerda de cada série.

E a seguir os dois penúltimos.

E os dois antepenúltimos...

Bem, acho que você entendeu.

As posições dos carrinhos ao entrarem em contato são assinaladas por duas setas na Fig. X-6.

Mas eu tinha perguntado: em que instante os carrinhos entram em contato?

Podemos responder, agora, não é mesmo?

Os carrinhos entram em contato entre o instante 3/20s e o instante 4/20s.

Verifique você mesmo.

E quando é que os carrinhos se separam de novo?

Eu achei que êles se separam pràticamente no instante 6/20s.

O que é que você achou?

E assinalei também por duas setas as posições dos carrinhos no instante da separação.

Observe agora o que acontece enquanto os carrinhos estão em contato. Você está vendo, pela primeira vez, a prova que realmente cada um dos carri-

nhos está tomando conhecimento da existência do outro.

E por que?

PORQUE ENQUANTO OS CARRINHOS ESTÃO EM CONTATO SUAS VELOCIDADES VARIAM!

E depois do instante 6/20s (mais ou menos)?

Isto é, depois dos carrinhos se separarem de novo?

Observe de novo. Você tem tudo ao alcance da sua mão, nas Figuras X-5 e X-6!

Como? As velocidades voltam a ser constantes, uniformes?

Ótimo! Os carrinhos estão de novo isolados. Já conversaram, e agora se separaram de novo.

E de novo os movimentos são retilíneos uniformes. De acôrdo com a Primeira Lei de Newton.

Enquanto as partículas permanecem isoladas, seus movimentos são retilíneos uniformes.

Quando elas se "encontram" e enquanto elas "ficam conversando", suas velocidades variam.

Concluímos que a variação da velocidade de uma partícula em um referencial inercial é a maneira que a partícula escolhe para nos avisar que seu Universo mecânico deixou de ser vazio, e que ela está "conhecendo" outra partícula.

Mas variação de velocidade não significa aceleração?

Ah! e não esqueçamos o "referencial inercial". Aliás eu vou grifá-lo: referencial i-ner-cial!

E chegou a hora do formalismo verbal: diremos que "a aceleração de uma partícula em um referencial inercial evidencia a interação dessa partícula com outra".

Acabamos então de descrever qualitativamente uma interação unidimensional de duas partículas.

Vamos tentar uma descrição quantitativa.

Isso nos levará até o Capítulo XIV!

E, você que me lê, mais do que nunca vou precisar da sua paciência, da sua compreensão, do seu entusiasmo.

Pois o que estamos iniciando agora é a elaboração da estrutura fundamental da Dinâmica.

E por favor, se você achar que eu vou muito depressa,... se você começar a se sentir perdido, não hesite. Me puxe pelo braço!

Ou fale logo com o Martins!

X-3-2 Gráfico v vs t da interação.

Antes da interação, as velocidades são constantes: as "partículas" estão isoladas no Laboratório.

Depois da interação, as velocidades são também constantes: os carrinhos estão de novo isolados.

Durante a interação as velocidades variam: os carrinhos são acelerados.

Não há dúvidas! Temos que estudar de mais perto a Cinemática dessa experiência.

E consequentemente, vamos ao gráfico v vs t da interação. (Figura X-7).

v (unidades arbitrárias)
t(1/20 s)
carrinho A
carrinho B
carrinho A
carrinho B
intervalo de interação

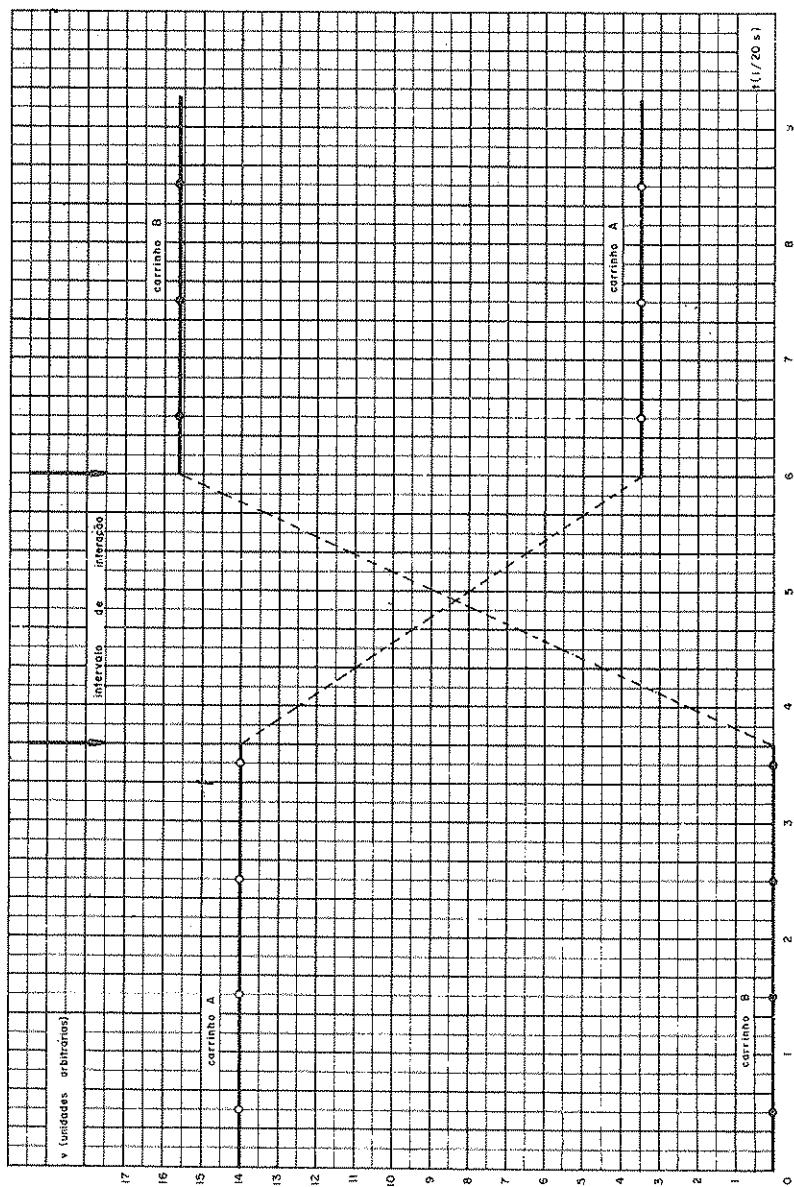
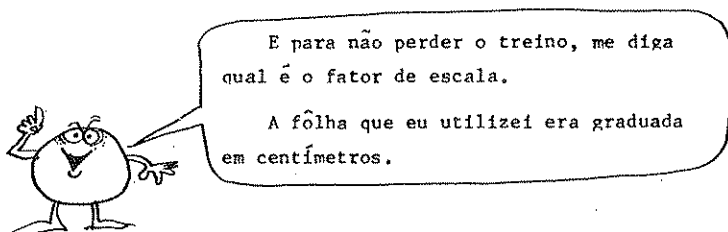



Figura X-7

Observe bem o gráfico X-7. Eu vou lhe explicar como é que eu o cons truí.

Primeiro, levei os tempos em abscissa, em unidades de $\frac{1}{20}$ s.

As velocidades foram levadas em ordenadas, em unidades arbitrárias.

MARTINS E EU

SUPONHA QUE EU QUEIRA SÒMENTE COMPARAR DUAS VELOCIDADES... UMA DE 28 m/s E A OUTRA DE 4,0 m/s POR EXEMPLO... A PRIMEIRA É SETE VÊZES MAIOR QUE A OUTRA. CERTO?

MAS EU NÃO TERIA CHEGADO AO MESMO RESULTADO SE EM VEZ DE MEDIR AS VELOCIDADES EM METROS POR SEGUNDO, EU TIVESSE DADO À PRIMEIRA O VALOR 7, EM UNIDADES ARBITRÁRIAS, E À SEGUNDA O VALOR...
QUE VALOR MARTINS?

Mas onde é que estávamos?

Ah! sim. Estava lhe explicando como é que eu construi o gráfico X-7.

Tempos em abscissa... velocidades em ordenada...

Assinalei também o início da interação, no instante 3,7 (em 1/20s). É minha estimativa a partir da fotografia e da Fig. X-6. Já vimos isso.

E assinalei o final da interação no instante 6,0 (em 1/20s).

Antes da interação:

- o carrinho B (o da esquerda) tem velocidade nula.
- o carrinho A tem velocidade uniforme à qual eu dou o valor de 14 unidades arbitrárias.

Depois da interação...

E se você me ajudasse um pouco, heim?

Vamos calcular juntos.

Qual é a velocidade do carrinho A depois da interação?

E a do carrinho B?

Você pode, por exemplo, medir na fotografia X-5 o espaço correspondente a três intervalos de tempo e dizer... "o espaço correspondente a três intervalos de tempo para o carrinho A antes da interação medem... tanto... e fornecem uma velocidade de 14 unidades...

Acho que agora uma regra de três deve dar conta do recado, não é mesmo?

Já calculou?

Aí vão meus resultados.

Depois da interação:

- o carrinho B tem velocidade igual a 15,6 unidades.
- o carrinho A tem velocidade igual a 3,5 unidades.

Continue com o gráfico debaixo dos olhos!

Não procuremos por enquanto saber *exatamente* o que acontece durante a interação.

Observemos simplesmente que a velocidade do carrinho B *aumenta* de 15,6 unidades.

Enquanto que a do carrinho A *diminui* de 14 - 3,5 = 10,5 unidades.

Durante o mesmo intervalo de tempo.

Ah! então a interação é caracterizada por uma <u>aceleração</u> do carrinho B e uma <u>deceleração</u> do carrinho A.

E como é que se comparam essas acelerações?

Veja eu posso dizer que em valor absoluto a aceleração média de B durante a interação foi de... 15,6 unidades arbitrárias, não é mesmo?

$$|\langle a_B \rangle| = 15,6 \text{ unidades}$$

E isto equivale a tomar que intervalo como unidade de tempo?

E como a variação da velocidade de A produz-se no mesmo intervalo de tempo que a de B, a aceleração média de A durante a interação se expressa nas mesmas unidades por

$$|\langle a_A \rangle| = 10,5 \text{ unidades}$$

O carrinho A relutou mais à variar sua velocidade que o carrinho B.

O carrinho A tem mais... personalidade que o carrinho B... êle não vai tanto na "conversa" do outro. O que é que você acha?

Como? Você queria saber até que ponto reluta mais que outro em variar sua velocidade?

Mas é muito simples! Veja: a aceleração média de B é

$$\frac{|\langle a_B \rangle|}{|\langle a_A \rangle|} = \frac{15,6}{10,5} = 1,5 \text{ vêzes}$$

maior que a de A; sempre em valor absoluto.

Você conclui que o carrinho B reluta 1,5 vêzes menos que o carrinho A em mudar sua velocidade.

Ou, se quiser, que o carrinho A é 1,5 vêzes mais... cabeçudo que o seu colega B.

Porém, tem mais.

Vejamos agora de um pouco mais perto o que acontece durante a interação.

O gráfico completo $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ é reproduzido na Fig. X-8.

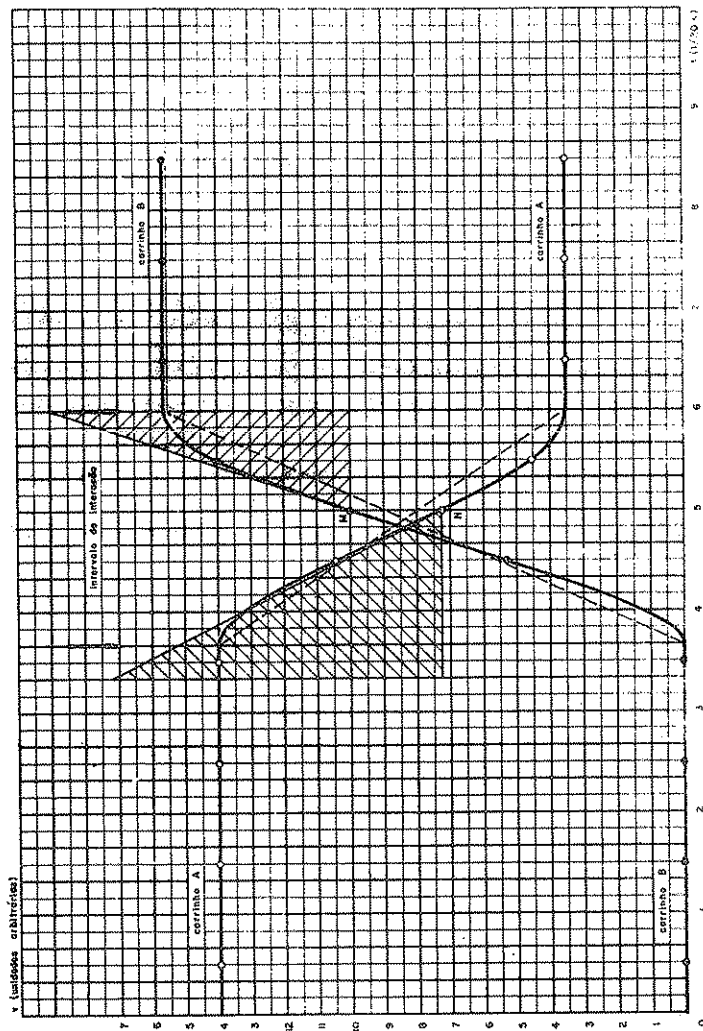



Figura X-8

Observe como realmente variam as velocidades dos dois carrinhos durante a interação.

E concentre mais especialmente sua atenção no instante 5,0(1/20s).

Os pontos correspondentes dos gráficos são M para o carrinho B e N para o carrinho A.

Quais são as acelerações instantâneas dos dois carrinhos nêsse instante?

É muito simples: trace tangentes e meça coeficientes angulares.

Eu medi êsses coeficientes com os triângulos sombreados da Figura X-8.

E achei para o carrinho B: 3,0 unidades arbitrárias.

... e para o carrinho A: 2,0 unidades arbitrárias.

A razão $\frac{|a_B|}{|a_A|}$ é igual a 1,5 no instante $5(\frac{1}{20}\ s)$.

Como é igual a 1,5 em qualquer outro instante da interação: é só medir.

De modo que não é sòmente em média, não.

Em qualquer instante da interação o carrinho A é 1,5 vêzes mais... teimoso que o carrinho B em "cair" na conversa.

Você não está achando isto um tanto quanto estranho?...

Ah! mas, diz o Martins, se os dois carrinhos conversassem de outro jeito, essa razão talvez mudasse.

Então eu pedi aos carrinhos que conversem de outro jeito. Isto é, eu preparei a interação de maneira diferente.

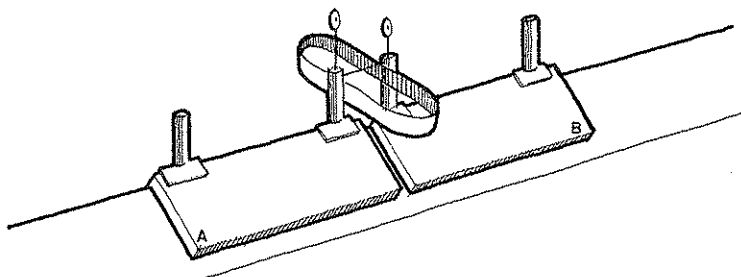



Figura X-9

Veja o desenho da Fig. X-9: amarrei os dois carrinhos com um fio de nylon, com uma mola comprimida entre êles e fixada sòmente ao carrinho B.

O Martins queimou o fio com um fósforo enquanto a máquina estroboscópica fotografava a "explosão".

E o resultado foi a fotografia reproduzida junta com o gráfico da Figura X-10. O carrinho A está agora do lado esquerdo, e o carrinho B, do lado direito.

A interação inicia-se no instante zero, e termina entre os instantes 2 e 3 ($\frac{1}{20}$ s).

O gráfico v vs t correspondente é o da Fig. X-10 a seguir.

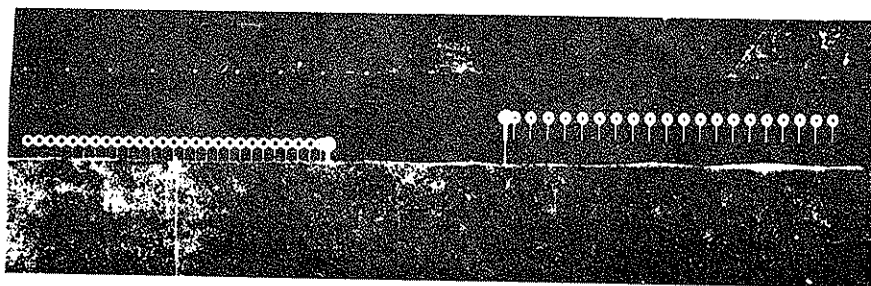
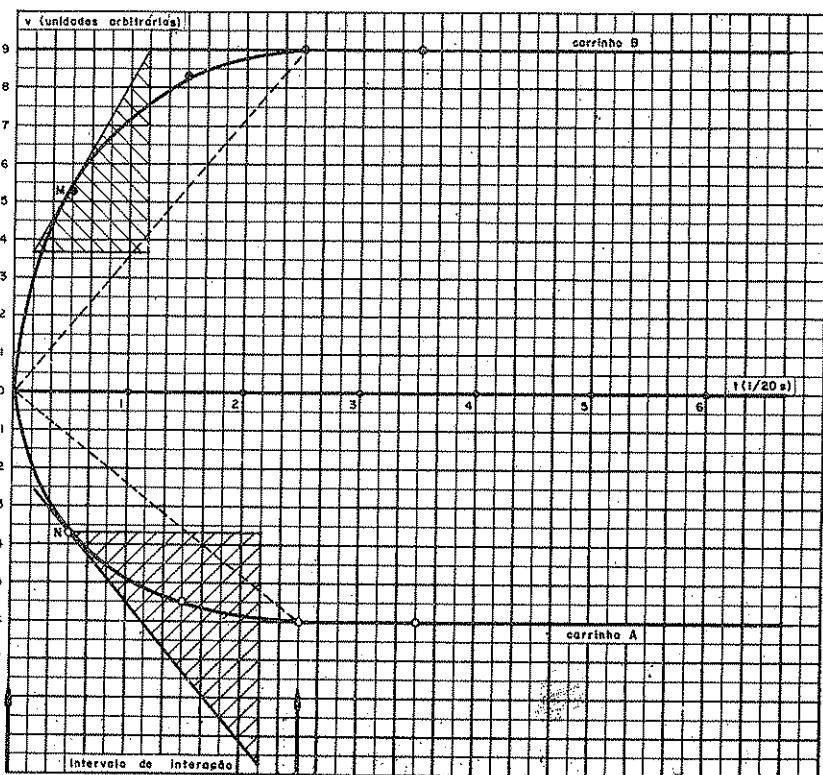



Figura X-10

Por que será que a velocidade do carrinho B é positiva, e a do carrinho A negativa, heim?

Qual é a aceleração média do carrinho A durante a interação?

E qual é a aceleração média do carrinho B?

E enquanto você mede essas acelerações médias sôbre o gráfico X-10, eu vou bater um papo com o Martins...

Mas como é? Já mediu?

Ótimo! então vamos lá.

Você achou que a aceleração média do carrinho B foi, em valor absoluto,

$$|\langle a_B \rangle| = 9{,}0 \text{ unidades arbitrárias}$$

E a do carrinho A

$$|\langle a_A \rangle| = 6{,}0 \text{ unidades arbitrárias.}$$

De modo que a razão entre essas duas acelerações é $\dfrac{|\langle a_B \rangle|}{|\langle a_A \rangle|} = 1{,}5.$

Não é que êsse 1,5 está voltando de novo?

MARTINS E EU

E SE A GENTE MEDISSE A ACELERAÇÃO EM UM INSTANTE QUALQUER DA INTERAÇÃO, PROFESSOR?
POR QUE NÃO MARTINS! VOCÊ QUER SE ENCARREGAR DISSO?

BEM...

VOLTEMOS AO GRÁFICO X-10. EU ESCOLHO, POR EXEMPLO, O INSTANTE 0,5 × 1/20 s... OS PONTOS CORRESPONDENTES SÃO, M PARA O CARRINHO B E N PARA O CARRINHO A. VOU TRAÇAR AS TANGENTES...

TANGENTES PARA QUE MARTINS?
NESSA EU NÃO CAIO!

O SENHOR ME DEU UM GRÁFICO v vs t; TENHO QUE MEDIR COEFICIENTES ANGULARES DE TANGENTES PARA ACHAR ACELERAÇÕES, NÃO É?

É! MUITO BEM...

PESSOAL! QUEM É
QUE TEM UM
ESPELHINHO?

OBRIGADO
VERINHA!

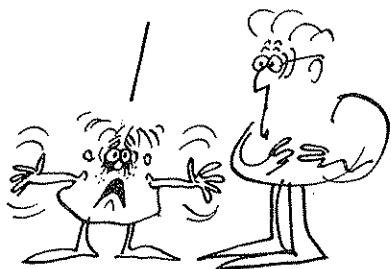
E O MARTINS
CONSTROI TANGENTES,
MEDE COEFICIENTES
ANGULARES...

CONSTROI O TRIÂNGULO
SOMBREADO DA FIGURA
X-10 E ACHOU...

O QUE FOI QUE VOCÊ
ACHOU MARTINS?

PARA O CARRINHO B,
1,8 UNIDADES. E
PARA O CARRINHO A,
1,2 UNIDADES.

DE MODO QUE A RAZÃO $\frac{|a_B|}{|a_A|}$ É IGUAL A...

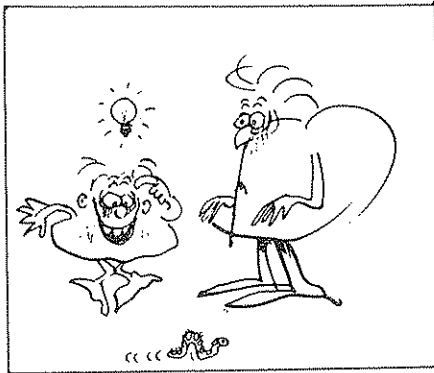
A 1,5 OUTRA VEZ!

NÃO É
POSSÍVEL!

PORQUE SERIA IMPOSSÍVEL, MARTINS?
NÃO É A EXPERIÊNCIA QUE NOS IMPÕE
ÊSSE 1,5?

SERÁ QUE PODEMOS BRINCAR DE LAGARTA COM OS CARRINHOS?
DE LAGARTA??

É! SE FIXARMOS UMA MOLA ENTRE OS DOIS CARRINHOS E SE LANÇARMOS O CONJUNTO, NÃO VAI ANDAR FEITO LAGARTA ESTICANDO, ENCOLHENDO, ESTICANDO, ENCOLHENDO?

TALVEZ ASSIM A GENTE PEGA ÊSSES CARRINHOS DANADOS!

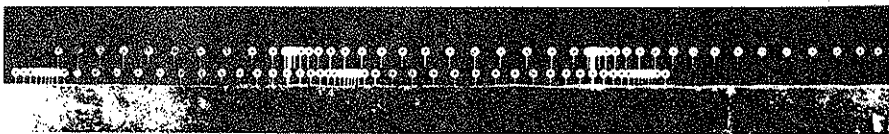
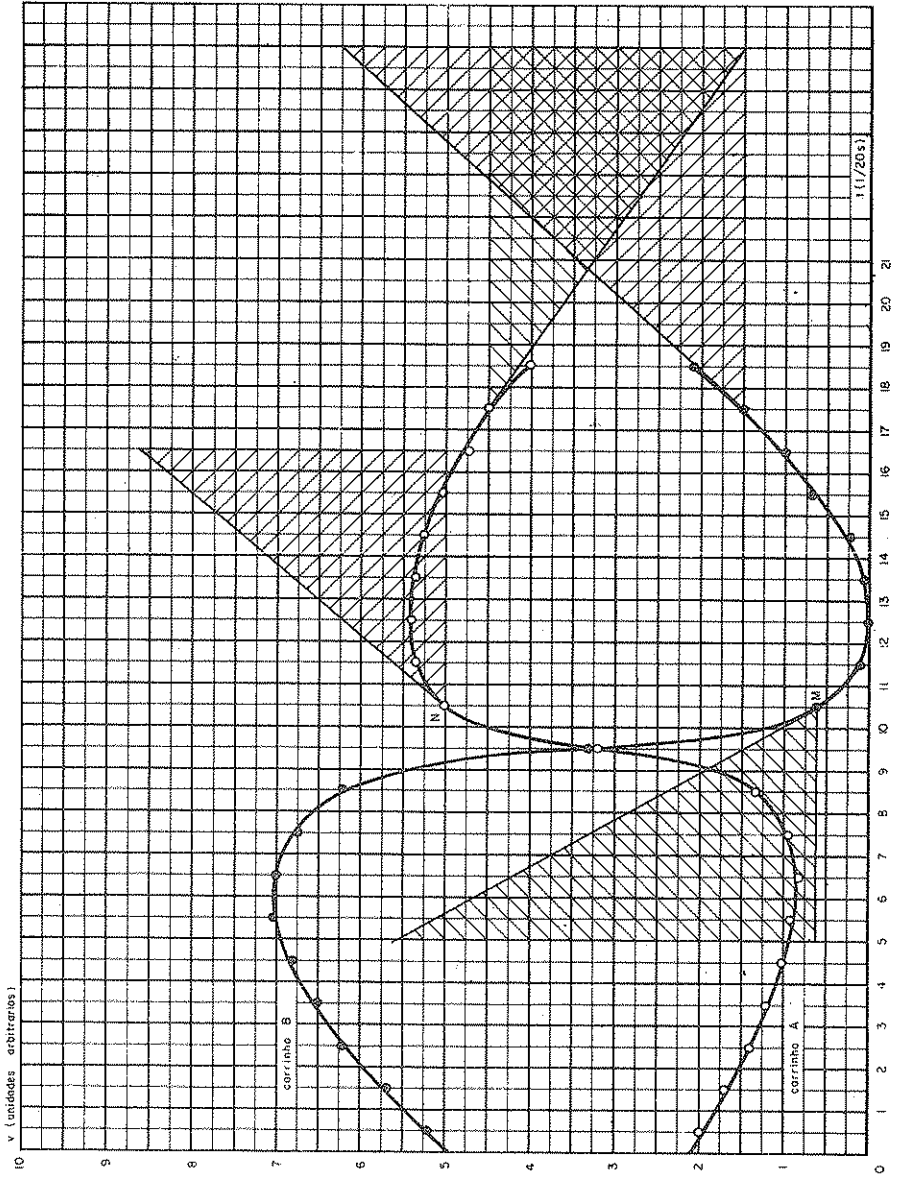
VAMOS AO LABORATÓRIO TESTAR, MARTINS!

E fomos ao Laboratório, Martins e eu.

Fixamos uma mola entre os dois mesmos carrinhos,... e não é mesmo que andaram feitos lagarta!

A fotografia é reproduzida junta com o gráfico da Fig. X-11. O carrinho B estava à direita e o carrinho A à esquerda, como na Fig. X-9. (Aliás bastou fixar também ao carrinho A a mola representada naquêle desenho).

Ah! Ía esquecendo: o conjunto foi lançado da esquerda para a direita.

O gráfico v vs t é representado na Fig. X-11 a seguir.

v (unidades arbitrarios)
carrinho B
carrinho A
N
M
t (1/20s)

Você já percebeu a diferença entre as experiências das fotografias X-5 e X-10 e esta agora da Fig. X-11?

Pense e observe!...

Certo! Na experiência que acabamos de realizar a conversa entre as duas partículas não para. A interação é permanente.

Muito bem, mas vamos ao gráfico X-11.

Martins e eu, medimos os coeficientes angulares das tangentes no instante 10,5 (1/20s): 1,8 para B e 1,2 para A.

Razão: $\frac{|a_B|}{|a_A|} = 1,5$

E medimos também no instante 17,5 ($\frac{1}{20}$ s): 1,1 para B e 0,71 para A.

Razão: $\left|\frac{a_B}{a_A}\right| = 1,5$

Não há jeito mesmo!

Não há jeito de escapar a êsse 1,5.

Pelo menos enquanto a conversa fôr entre aquêles carrinhos A e B.

Tôdas as vêzes que interagem os carrinhos A e B, que escolhemos no início dessa série de experiências, a aceleração de B é 1,5 vêzes maior que a aceleração de A no mesmo instante.

E não custa nada lembrar que essas acelerações são medidas no referencial inercial do Laboratório. E que os carrinhos são (artificialmente) isolados.

Em outros têrmos, o carrinho A é... como dizer?... 1,5 vêzes mais inerte que o carrinho B?

Você concorda?

E nessa altura o Martins teve outra das suas idéias geniais...

MARTINS E EU

VÊ?? VER COM OS OLHOS??
CARRINHO NÃO ENXERGA!

AH! Então diremos que são MECÂNICAMENTE IGUAIS SE ÊLES SE COMPORTAM DA MESMA MANEIRA DURANTE A INTERAÇÃO!

Há no Laboratório dois carrinhos C e D aparentemente idênticos: mesma construção, mesmo material, mesma espessura de chapas...

Fizemos interagir os carrinhos C e D.

Primeiro por intermédio da mola. Lançamos o carrinho D e a seguir o carrinho C, no mesmo sentido, e com velocidade maior.

O carrinho C alcançou o carrinho D. Ambos conversaram um pouco... e se separaram. A fotografia e o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ correspondentes estão reproduzidos na Figura X-12 a seguir.

v (unidades arbitrárias)

carrinho C

carrinho D

carrinho D

carrinho C

t (1/20 s)

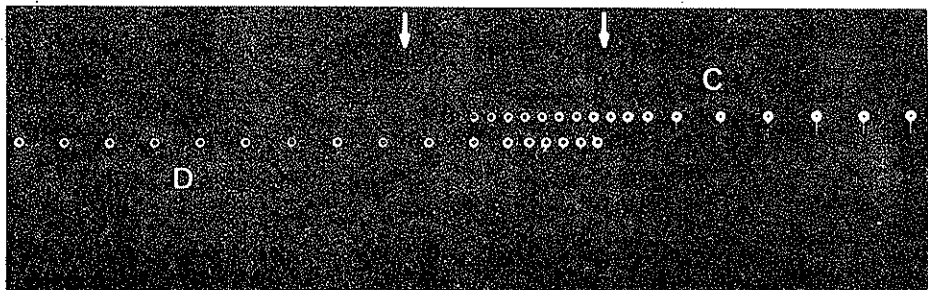
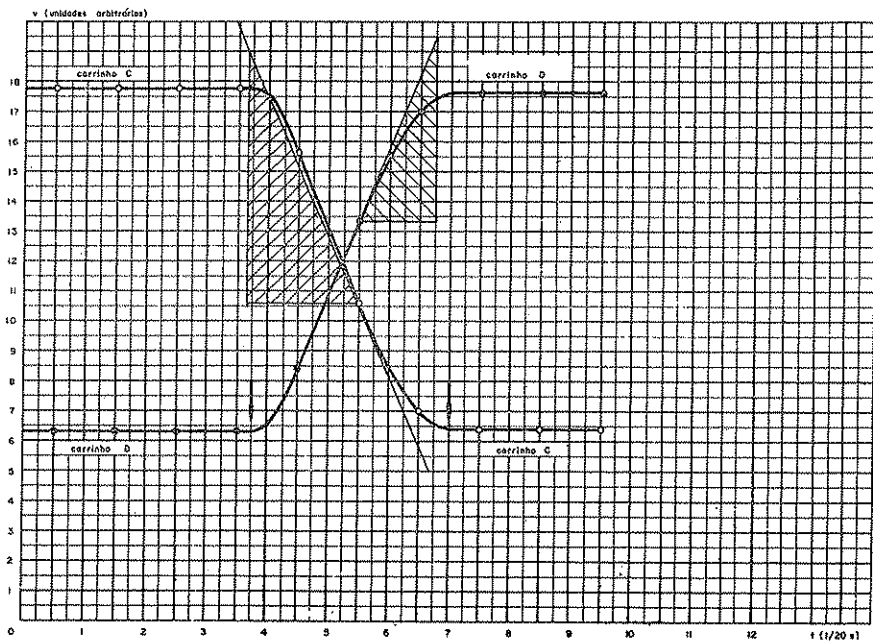



Figura X-12

Medimos as acelerações em um instante qualquer da interação:

$$5,5 \ (\frac{1}{20} \ s) \text{ por exemplo.}$$

Resultado: 2,3 unidades para o carrinho C,

2,3 unidades para o carrinho D.

A razão $\frac{|a_C|}{|a_D|}$ é igual a 1.

E a pedido do Martins fizemos interagir os mesmos carrinhos C e D de outra maneira:

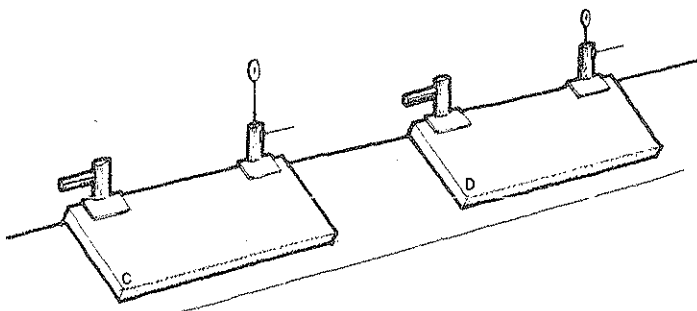



Figura X-13

Na hora da "conversa", uma agulha do carrinho C penetra em um cilindro do carrinho D que contem massa de modelar (Fig. X-13).

De modo que depois da interação os carrinhos continuam juntos.

Mas observe bem que os carrinhos continuam idênticos... igualzinhos.

Fotografia e gráficos v vs t estão reproduzidos na Fig. X-14.

E mais uma vez a razão entre as acelerações dos dois carrinhos, em um instante qualquer da interação, é igual a 1.

v (unidades arbitrárias)
carrinho D
carrinho C
M
N
todo mundo junto!
intervalo de interação
t (1/20 s)

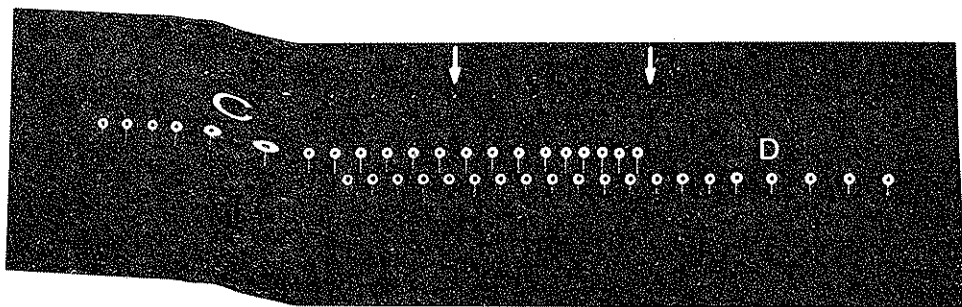
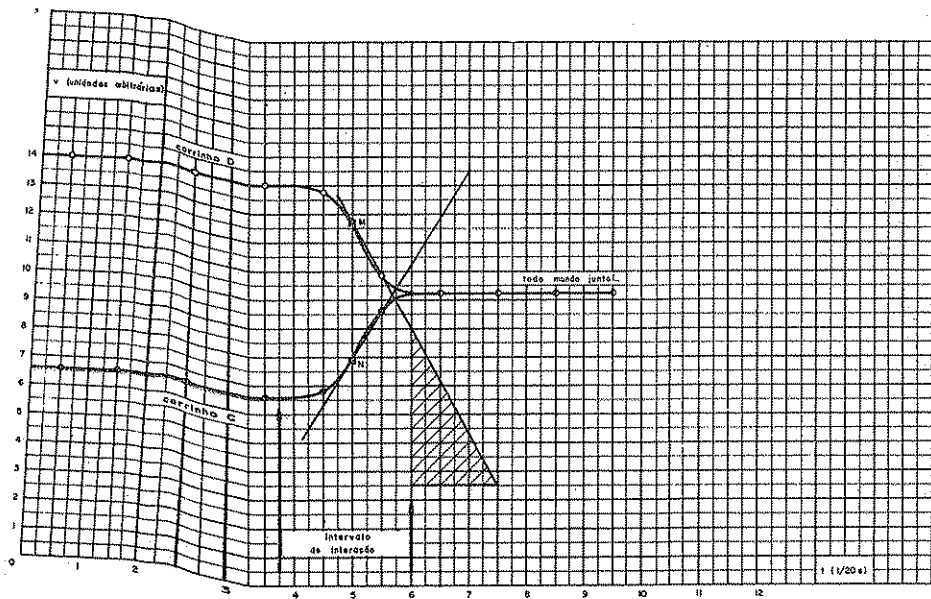



Figura X-14

De modo que:

DURANTE A INTERAÇÃO ENTRE DUAS PARTÍCULAS ISOLADAS, ALGO SE CONSERVA CONSTANTE: A RAZÃO ENTRE AS ACELERAÇÕES QUE CARACTERIZAM PRECISAMENTE A EXISTÊNCIA DA INTERAÇÃO.

X-4 Coeficientes de inércia - Massa inercial.

Em tôdas as experiências que fizemos com os carrinhos A e B, a razão $\frac{|a_A|}{|a_B|}$ entre as acelerações dos carrinhos, durante a interação, era igual a 1,5.

Em tôdas as experiências que fizemos juntos, como também em tôdas as outras que eu fiz e que não tenho tempo de contar-lhe agora.

Como em tôdas as que você poderá fazer se você quiser vir no meu Laboratório.

Prometo emprestar-lhe meus carrinhos.

Em tôdas essas experiências o carrinho B se mostra mais inerte que o carrinho A.

Exatamente 1,5 vêzes mais inerte.

Em tôdas as experiências que fizemos com os carrinhos C e D, a razão $\frac{|a_C|}{|a_D|}$ era igual a 1.

Concluímos daí que o carrinho C é tão inerte quanto o carrinho D. O que não é de estranhar desde que êsses dois carrinhos são, por assim dizer, irmãos gêmeos.

E de repente me vem uma idéia. Se realmente essa qualidade de "inércia" fôr algo essencial de cada um dos carrinhos, ela deve poder medir-se por comparação.

Eu não sei se isto está bem claro. Quero dizer o seguinte: se fizermos interagir os carrinhos B e C por exemplo, vamos achar que o carrinho B é tantas vêzes mais inerte que o carrinho C.

Fiz a experiência. Ela está repetida na fotografia da Fig. X-15. Os carrinhos vão da direita para a esquerda. O carrinho B é o da direita e o carrinho C o da esquerda.

A razão $\frac{|a_C|}{|a_B|}$ é igual a 1,2.

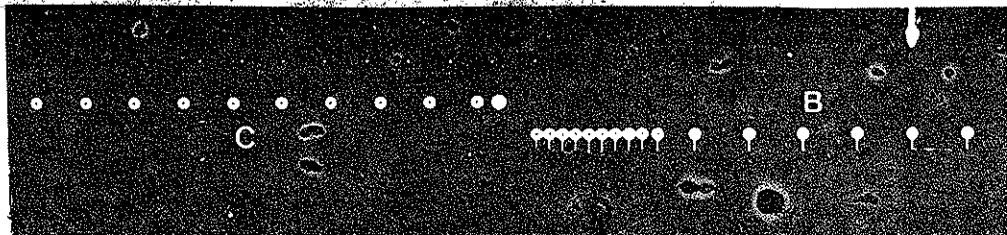



Figura X-15

Como? Você diz que sem o gráfico v vs t você não pode verificar?

Pois eu aposto que em três minutos você pode achar a razão entre as acelerações médias durante a interação.

Pense bem...

A razão entre as acelerações médias não é igual à razão entre as diferenças das velocidades dos carrinhos antes e depois da interação?

Pois é!

Então meça diretamente na fotografia X-15.

Ah! então o carrinho B é 1,2 vêzes mais inerte que o carrinho C.
A seguir, fiz interagir o carrinho A com o mesmo carrinho C.

A fotografia da interação está reproduzida na Fig. X-16. O carrinho A é o da direita e o carrinho C o da esquerda.

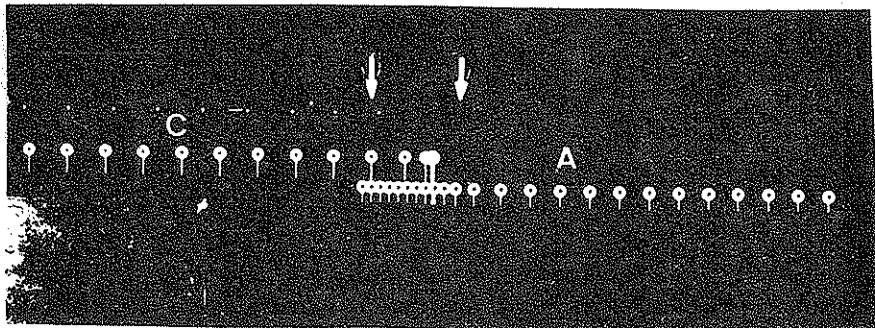



Figura X-16

Construí os gráficos v vs t, medi coeficientes angulares de tangentes e achei...

Mas você vai medir a razão entre as acelerações médias, diretamente na Fig. X-16.

Você achou quanto? Heim? Você achou que $\frac{|\langle a_C \rangle|}{|\langle a_A \rangle|}$ é igual a 1,8?

Pois eu também achei $\frac{|a_C|}{|a_A|} = 1,8.$

De modo que o carrinho A é 1,8 vêzes mais inerte que o carrinho C.

Em resumo: o carrinho B é 1,2 vêzes mais inerte que o carrinho C, e o carrinho A é 1,8 vêzes mais inerte que o carrinho C.

Mas então, o carrinho A deve ser $\frac{1,8}{1,2} = 1,5$ vêzes mais inerte que o carrinho B!

Vamos fazer a experiência?

Mas espere aí, a experiência já foi feita.

E várias vêzes ainda.

É a primeira que fizemos.

E realmente verificamos que o carrinho A é 1,5 vêzes mais inerte que

o carrinho B.

Tudo isto me parece bastante satisfatório, não acha?

Acredite que podemos tentar formalizar nossas conclusões, mais ou menos do seguinte modo:

1) Consideremos, em um referencial inercial, um conjunto isolado de duas partículas. "Isolado" significa que as partículas podem interagir entre si, mas não com outras partículas.

Ou, como diz o Martins, ninguém deve se meter na conversa das duas.

2) A interação é caracterizada pelas acelerações das partículas.

3) Qualquer que seja o tipo de interação, as acelerações das partículas conservam entre si uma razão constante.

Essa razão constante caracteriza mecânicamente o par de partículas que interagem.

E agora preste bem atenção.

Acredito ou melhor, acreditamos você e eu, que essa inércia, essa relutância em se deixar "levar" pela interação, é algo intimamente ligado à própria existência da partícula.

Pois qualquer que seja o interlocutor, desde que não seja a Terra e que a conversa não seja "gravitacional", o carrinho A comporta-se diferentemente do carrinho B ou do carrinho C.

Como o proton comporta-se diferentemente do eletron.

E um elefante diferentemente de uma bola de pingue-pongue...

Vamos então caracterizar mecânicamente cada corpo, cada partícula, por um coeficiente que chamaremos seu <u>coeficiente de inércia</u>.

Seu símbolo será <u>i</u>, pelo menos provisòriamente.

O coeficiente de inércia do carrinho A é i_A.

O do carrinho B é i_B.

O do elefante seria talvez êste →

E o da bola de pingue-pongue i_o.

As experiências realizadas permitem determinar não o valor do coeficiente de inércia de duas partículas, mas a razão entre os coeficientes de inércia das duas partículas que interagem.

Por definição, diremos que a razão entre os coeficientes de inércia de duas partículas é igual à razão inversa do valor absoluto das acelerações das partículas quando, estando o par isolado, elas interagens em um referencial inercial:

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = \frac{|a_2|}{|a_1|}} \qquad \text{(X-1)}$$

Mas não é preciso restringir-nos aos valores absolutos das acelerações.

Durante a interação as acelerações das partículas têm sempre sinais contrários. Podemos então definir a razão dos coeficientes de inércia por

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{a_2}{a_1}} \qquad \text{(X-2)}$$

Você entende porque definimos a razão dos coeficientes de inércia pela razão inversa das acelerações?

Veja: mais inerte a partícula, menor sua aceleração. Não é mesmo?

Evidentemente, a relação (X-1) permitiria medir o coeficiente de inércia de qualquer partícula.

Bastaria escolher arbitràriamente uma partícula, dar o valor 1 ao seu coeficiente de inércia, e fazer interagir com ela a partícula cujo coeficiente queremos conhecer.

É assim que se déssemos arbitràriamente o valor 1 ao coeficiente de

inércia do carrinho C, o valor do coeficiente de inércia do carrinho A seria 1,2.

E o do carrinho B seria 1,8.

Coeficientes de inércia...

Algo que caracteriza cada objeto, cada partícula no Universo.

Mas que sòmente se manifesta quando o objeto, ou a partícula, interagem com outros.

A propósito... coeficiente de inércia se chama geralmente massa inercial. Símbolo M_i.

A relação (X-2) se escreve então

$$\boxed{\frac{(m_i)_1}{(m_i)_2} = -\frac{a_2}{a_1}} \qquad \text{(X-3)}$$

As experiências efetuadas permitem escrever as relações seguintes entre as massas inerciais dos nossos carrinhos:

$$\frac{(m_i)_A}{(m_i)_B} = 1{,}5 \qquad \frac{(m_i)_C}{(m_i)_D} = 1{,}0$$

$$\frac{(m_i)_B}{(m_i)_C} = 1{,}2 \qquad \frac{(m_i)_A}{(m_i)_C} = 1{,}8$$

Massa inercial...

Mas espere aí. Já encontramos a massa gravitacional m_g.

Massa inercial... massa gravitacional.

Você não acha que é muita massa junta?

X-5 Massa inercial e massa gravitacional.

X-5-1 Comparação.

Voltemos ràpidamente às experiências de interação com nossos carrinhos.

Por que será que o carrinho A é 1,5 mais inerte que o carrinho B?

Volto ao Laboratório e, fico contemplando os dois carrinhos.

Não adianta muito...

Òbviamente, não são idênticos. Um dêles tem uma sôbrecarga de metal que o outro não tem.

Sôbrecarga?...

Pego um carrinho em cada mão.

O carrinho A é sensìvelmente mais pesado que o outro.

A massa gravitacional do carrinho A é maior que a do carrinho B.

Será que por acaso haveria alguma relação entre massa inercial e massa gravitacional?

Figura X-17

Fomos então, de novo, para o Laboratório e medimos as massas gravitacionais dos nossos carrinhos.

Aí está o resultado:

Carrinho A	600g
Carrinho B	400g
Carrinho C	330g
Carrinho D	330g

Calcule a razão $\frac{(m_g)_A}{(m_g)_B}$. Ela é igual a 1,5.

Como também é igual a 1,5 a razão $\frac{(m_i)_A}{(m_i)_B}$.

A razão $\frac{(m_g)_C}{(m_g)_D}$ é igual a 1,0.

Como também é igual a 1,0 a razão $\frac{(m_i)_C}{(m_i)_D}$.

A razão $\frac{(m_g)_B}{(m_g)_C}$ é igual a 1,2.

Como também é igual a 1,2 a razão $\frac{(m_i)_B}{(m_i)_C}$.

E a razão $\frac{(m_g)_A}{(m_g)_C}$ é igual a 1,8.

Como também é igual a 1,8 a razão $\frac{(m_i)_A}{(m_i)_C}$.

Sinto muito Martins, temos que nos render à evidência experimental.

A RAZÃO ENTRE AS MASSAS INERCIAIS DE DUAS PARTÍCULAS É SEMPRE IGUAL À RAZÃO ENTRE SUAS MASSAS GRAVITACIONAIS:

$$\boxed{\frac{(m_i)_1}{(m_i)_2} = \frac{(m_g)_1}{(m_g)_2}} \qquad \text{(X-4)}$$

Você deve desconfiar que, frente a êsse resultado absolutamente imprevisível, inesperado, os físicos não se conformaram tão fàcilmente assim.

Afinal, por inocente que possa parecer a relação X-4, ela não deixa de ser incomprêensível.

Repito: por que cargas d'água a massa inercial de uma partícula teria de ser, sempre, proporcional à sua massa gravitacional?

Inércia proporcional à propriedade de atrair matéria e ser atraído por ela?

E repetiram-se as experiências.

Sempre mais sofisticadas. Sempre mais precisas.

Procurando desvendar o mistério da proporcionalidade entre as duas massas que caracterizam cada partícula do Universo.

E essas experiências sempre repetiam o mesmo monótono refrão: "dentro da faixa de incerteza das medidas, massa inercial e massa gravitacional são proporcionais"...

Para lhe dar uma idéia dessa faixa de incerteza, deixe-me transcrever os últimos resultados obtidos pelo grupo que pesquisa o assunto na Universidade de Princeton, nos Estados - Unidos, sob a orientação do Prof. Dicke.

A evidência experimental obtida pelo grupo mostra que as duas massas são proporcionais a menos de três partes em 10^{11}!

Você se dá conta? Três partes em 10^{11}!!

É ou não é precisão experimental?

Mas observe bem: evidência experimental. Sòmente experimental. Nenhuma teoria permite deduzir êsse resultado. Até hoje pelo menos.

X-5-2 Identidade entre massa inercial e massa gravitacional.

Vejamos em que ponto nos encontramos.

Sabemos medir a massa gravitacional de um corpo, comparando com uma balança a fôrça de atração exercida pela Terra sôbre o corpo, com a fôrça de atração exercida pela Terra sôbre o quilograma-padrão.

Sabemos por outro lado comparar as massas inerciais de duas partículas, fazendo-as interagir depois de isolá-las artificialmente da interação gravitacional.

Essas experiências de interação fornecem sòmente a razão entre as massas inerciais da partícula.

Òbviamente poderíamos escolher uma partícula padrão, à cuja massa inercial, daríamos arbitràriamente o valor 1.

E faríamos interagir as outras partículas com a partícula padrão.

Achando por exemplo:

$$(m_i)_1 = 1,2 \qquad (m_i)_2 = 3,4 \qquad (m_i)_3 = 2,8\ldots$$

Mas, e agora vem o ponto importante, a massa inercial de uma partícula é sempre proporcional à sua massas gravitacional.

Suponha que a massa gravitacional do padrão de massa inercial seja igual a 0,5 kg, por exemplo.

Então as massas gravitacionais das outras partículas são medidas, em quilos, pela metade (também) dos valores acima das massas inerciais:

$$(m_g)_1 = 0,6\ \text{kg} \qquad (m_g)_2 = 1,7\ \text{kg} \qquad (m_g)_3 = 1,4\ \text{kg}$$

Essas massas gravitacionais não mudam.

Mas bastaria que mudássemos de padrão de massa inercial para mudar

os valores das massas inerciais das três outras partículas.

E poderíamos ter algo semelhante ao seguinte.

	Partícula 1	Partícula 2	Partícula 3
Massa gravitacional	0,6 kg	1,7 kg	1,4 kg
Massa inercial medida com o primeiro padrão	1,2	3,4	2,8
Massa inercial medida com o segundo padrão	1,8	5,1	4,2
Massa inercial medida com o terceiro padrão	0,30	0,85	0,70

Ora, em qualquer interação entre a partícula (1) e a partícula (2) por exemplo, a única coisa que importa é a razão entre as massas inerciais.

E obviamente tanto faz escrever $\frac{3,4}{1,2}$, ou $\frac{5,1}{1,8}$ ou $\frac{0,85}{0,30}$ ...

Ou mesmo $\frac{1,7}{0,6}$, não é mesmo?

Vamos lá! Você entende que em vez de complicar-se inùtilmente a existência com essas massas inerciais, seria muito mais simples torná-las iguais às massas gravitacionais?

Pois, desde que sòmente interessa a razão entre massas inerciais, e que essa razão é igual à razão entre massas gravitacionais, é muito mais simples decretar a igualdade entre as duas massas.

É o que fêz Einstein no início da sua teoria da Relatividade Geral.

Diz êle em substância: massa inercial e massa gravitacional são um mesmo e único atributo da matéria.

E assim postula a identidade entre massa inercial e massa gravitacional.

A partir de agora, não mais faremos distinção entre as duas massas.

Caracterizaremos mecânicamente uma partícula pela sua massa. Ponto.

Massa essa medida em quilograma, naturalmente.

MARTINS E EU

MARTINS! DORMINDO NA AULA! QUE DESILUSÃO!
Z! Z...
HEIM?!

UÁÁÁ... PROFESSOR, O SENHOR ESTÁ DOENTE?
DOENTE??

É QUE DE REPENTE O SENHOR VIROU TÃO SÉRIO...

TENHA PACIÊNCIA, ESSAS ÚLTIMAS PÁGINAS SÃO... SÃO...
VOCÊ ENGULIU MAL, MARTINS?

DESCULPE, MAS SÃO CHATAS MESMO!

VENHA CÁ MARTINS, VENHA CÁ! VAMOS SENTAR JUNTOS E LER DE NÔVO TUDO ISTO!

BEM, RECONHEÇO QUE HÁ HISTÓRIAS MAIS FASCINANTES, MAS...
HEIM? HONESTAMENTE PROFESSOR!

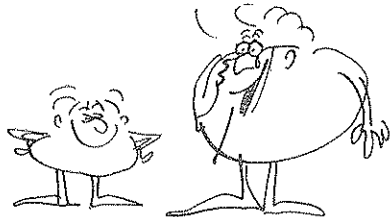
O SENHOR NÃO PODERIA RESUMIR TUDO ISTO EM DESENHOS?
DE NÔVO OS SEUS DESENHOS MARTINS?

SUPONHA QUE SOMOS DOIS ASTRONAUTAS PERDIDOS NO ESPAÇO SIDERAL... ESTAMOS ISOLADOS DE QUALQUER INTERAÇÃO EXTERNA. E ESTAMOS LIGADOS POR UMA MOLA ESPIRAL O QUE SE SIGNIFICA QUE VOCÊ E EU ESTAMOS INTERAGINDO POR INTERMÉDIO DESTA MOLA...

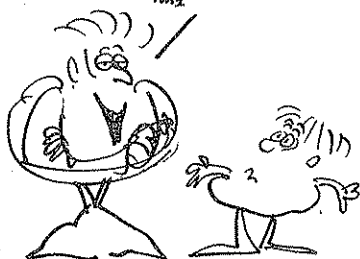
AFASTANDO-NOS UM DO DO OUTRO... APROXIMANDO-NOS... AFASTANDO-NOS DE NÔVO!
MANDA BRASA PROFESSOR!

OSCILANDO?
ISTO! E UMA CÂMERA ESTÁ FILMANDO NOSSA INTERAÇÃO...

NÃO! SE VOCÊ ACELERA SEMPRE MAIS DO QUE EU, É QUE MINHA INÉRCIA É MAIOR QUE A SUA...

DE MANEIRA QUE, PARA NÃO COMPLICAR INUTILMENTE A EXISTÊNCIA DA GENTE, NÃO VEJO RAZÃO PARA NÃO "DECRETAR" QUE MINHA MASSA INERCIAL É 60 kg, E A MASSA INERCIAL DO SENHOR É 80 kg.

PARA COMPARAR AS MASSAS INERCIAIS DE DOIS CORPOS, PODEMOS FAZÊ-LOS INTERAGIR SEPARADAMENTE COM UM TERCEIRO...

PODEMOS FAZER INTERAGIR O CORPO 1 COM O CORPO 2, O QUE ME FORNECE $\frac{m_2}{m_1}$... QUANTO?...
2,5!

DEPOIS EU FAÇO INTERAGIR O CORPO 1 COM O CORPO 3, O QUE ME FORNECE $\frac{m_3}{m_1}$ ... 1,8!

CERTO! DE MODO QUE
$\frac{M_2}{M_3} = \frac{M_2|M_1}{M_3|M_1} = \frac{2,5}{1,8} = 1,4$

HAH! PERFEITO!

O QUE EU QUERIA SABER É SE A GENTE PODERIA UTILIZAR A INTERAÇÃO COM A TERRA... A INTERAÇÃO GRAVITACIONAL PARA COMPARAR ESTAS MASSAS?

MARTINS, VOCÊ NÃO SABE QUE TODOS OS CORPOS CAEM COM A MESMA ACELERAÇÃO?
SEI SIM SENHOR...

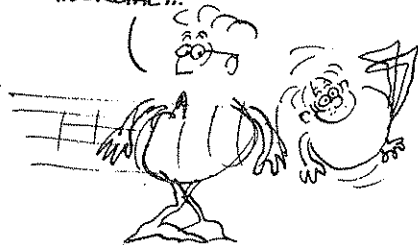
DE MODO QUE NÃO É MEDINDO ESSAS ACELERAÇÕES QUE PODERIAMOS COMPARAR AS MASSAS!

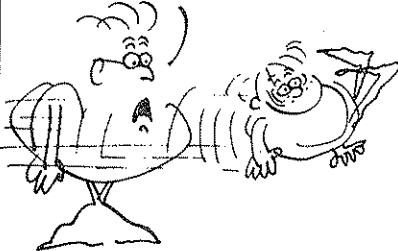
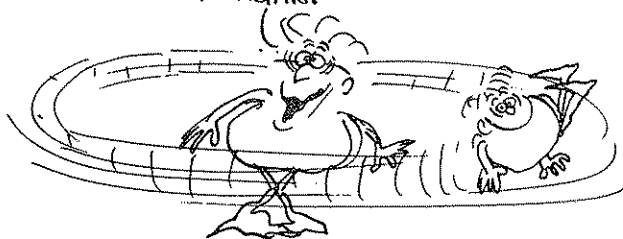
ENTÃO A INTERAÇÃO GRAVITACIONAL NÃO SERVE?

PODERIA, TEORICAMENTE, SERVIR!

VOCÊ VÊ, MARTINS, APRENDEREMOS MAIS TARDE QUE PRECISAMENTE POR CAUSA DA PROPORCIONALIDADE ENTRE MASSA INERCIAL E MASSA GRAVITACIONAL, A ACELERAÇÃO DA PEDRA. QUE VOCÊ ESTÁ DEIXANDO CAIR AGORA MEDE (INDIRETAMENTE) A MASSA DA TERRA!

COMO MEDE A MASSA DA TERRA A ACELERAÇÃO DA APOLO-10, OU DA LUA... OU DE VOCÊ, MARTINS, QUE EU ESTOU COLOCANDO EM ÓRBITA RASANTE!

E POR CAUSA DA SIMETRIA DA INTERAÇÃO GRAVITACIONAL, PARA ACHAR A SUA MASSA INERCIAL...

EU TERIA QUE ME COLOCAR EM UM REFERENCIAL INERCIAL FORA DO SISTEMA TERRA - MARTINS...

...E MEDIR A ACELERAÇÃO DA TERRA. NÃO É MUITO PRÁTICO!

EIS PORQUE EU LHE DISSE QUE A INTERAÇÃO GRAVITACIONAL NÃO SERVIA PARA MEDIR MASSAS INERCIAIS.

X-6 Um outro tipo de balança para massas inerciais: as interações bidimensionais.

Uma interação unidimensional entre um par isolado de partículas, em um referencial inercial, constitui, no fundo, uma balança para massas inerciais.

Basta medir as acelerações médias durante um mesmo intervalo, e pronto! A razão inversa dessas acelerações é igual à razão entre as massas inerciais das partículas.

Você no entanto poderá objetar que as interações unidimensionais não são, de longe, as únicas encontradas na Natureza.

A interação entre o Sol e a Terra por exemplo, ou entre a Terra e a Apolo 10, não são interações unidimensionais.

São interações em duas dimensões: bidimensionais.

Mas no fundo o número de dimensões de uma interação depende sòmente das velocidades iniciais das partículas.

Eu quero dizer por isso que se a nave espacial, ao se desprender do último estágio do foguete portador, tivesse uma velocidade em direção do centro da Terra, a interação Terra-Nave seria unidimensional.

Ora o que importa para comparar massas inerciais são acelerações e não velocidades.

Isso dá para desconfiar que o método das razões inversas das acelerações deve poder se aplicar a qualquer tipo de interações, e não sòmente as interações unidimensionais.

É bem verdade que agora teremos que lidar com acelerações vetoriais, e não apenas escalares como fizemos até agora.

Mas não há de ser muito difícil...

Ah! e não esqueçamos que o referencial em que estudamos a interação deve ser inercial.

Mas você não tinha esquecido isso, não é mesmo?

A Fig. X-18 é um desenho do aparelho que utilizamos, Martins e eu, para fazer as experiências.

É uma "mesa de ar", horizontal, e sôbre a qual deslizam dois discos de plexiglass. Os discos flutuam sôbre um colchão de ar.

Uma câmera estroboscópica, fixada ao teto do Laboratório, permite registrar os acidentes de tráfego que ocorrem na mesa.

Um dêsses registros é mostrado na Fotografia da Fig. X-19. A seta indica a direção de onde vinham os discos antes da colisão.

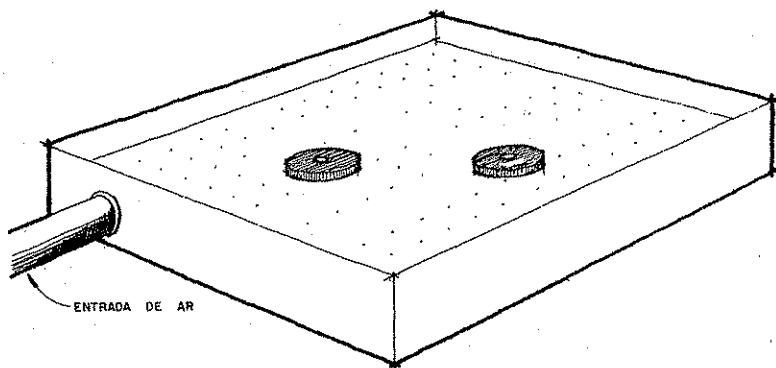



Figura X-18

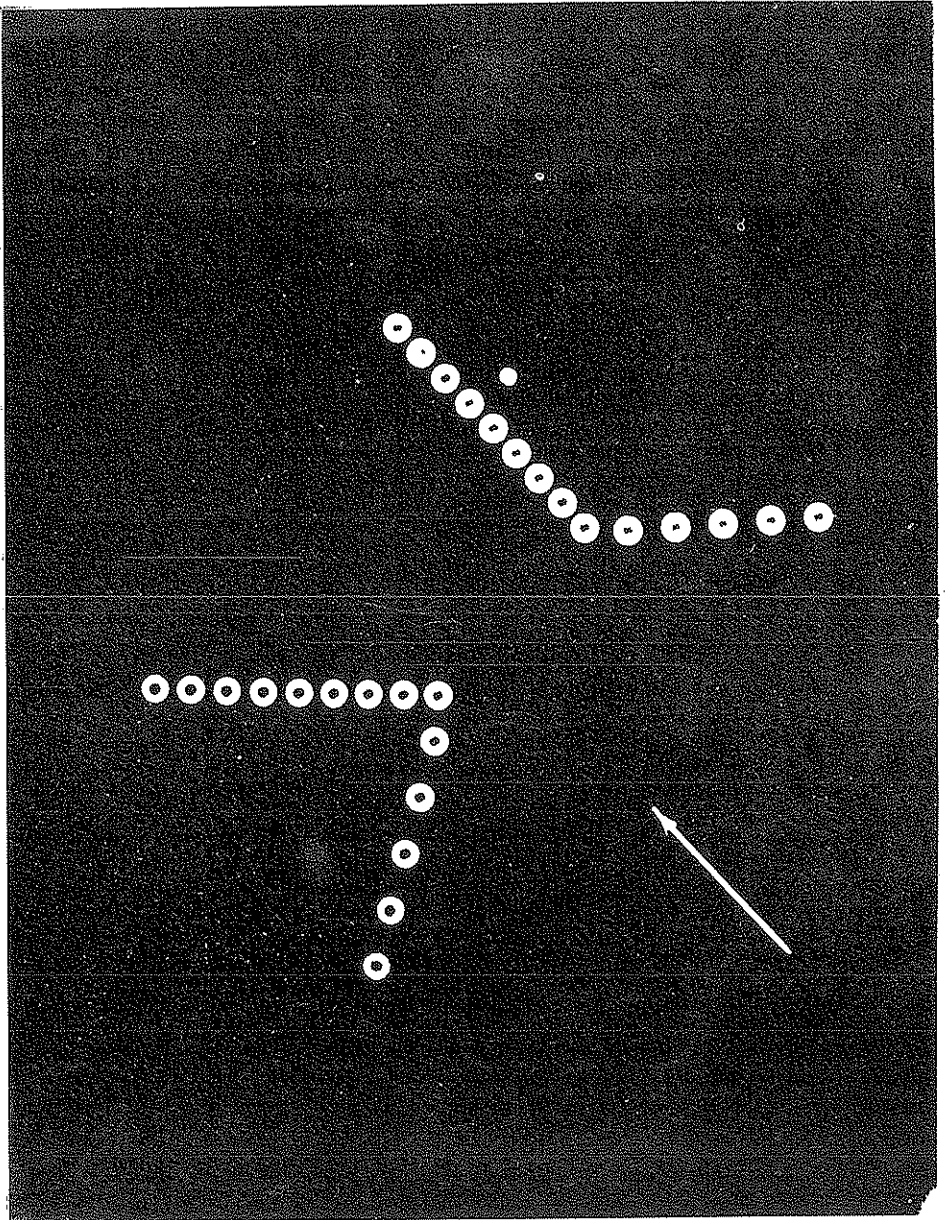



Figura X-19

Analisemos ràpidamente.

Passei para uma fôlha de papel transparente as velocidades $\vec{u}_A$ e $\vec{u}_B$ dos dois dìscos antes da interação. Essas velocidades são representadas em unidades arbitrárias, tomando como unidade de tempo quatro intervalos consecutivos entre flashes. (Fig. X-20).

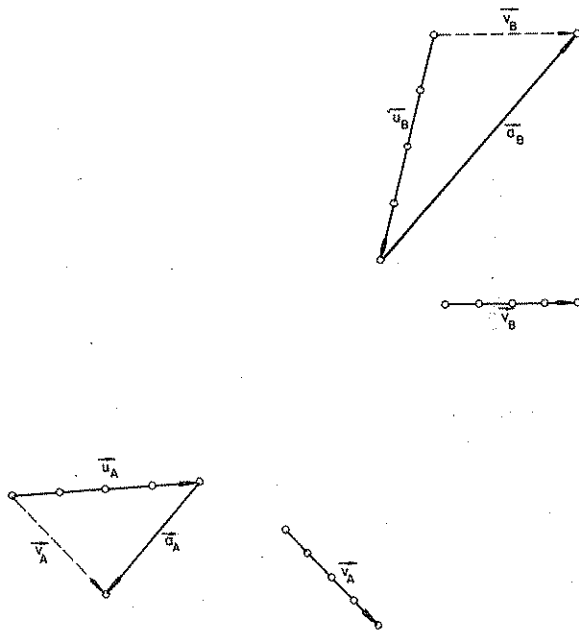



Figura X-20

Observe como foi simples a construção dêsses vetores velocidade. Passei para o papel transparente cinco posições sucessivas de cada um dos discos. E represento o vetor velocidade pelo segmento orientado definido pelo primeiro e pelo último dêsses cinco pontos.

Se não se convencer da validade do processo, discuta o assunto com seu Professor.

A seguir construí os vetores $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ depois da colisão, seguindo evidentemente as mesmas regras que para a construção de $\vec{u}_A$ e $\vec{u}_B$.

Transporto $\vec{v}_A$ até que sua origem coincida com a de $\vec{u}_A$. E $\vec{v}_B$ até que sua origem coincida com a de $\vec{v}_B$.

As variações de velocidade dos dois discos durante a colisão são então fáceis de construir.

E como essas variações ocorreram durante o mesmo intervalo de tempo, os segmentos orientados correspondentes podem perfeitamente representar, também, as <u>acelerações médias</u> dos discos durante a interação.

De acôrdo? Vamos!

Ótimo. Temos assim as acelerações médias $\langle\vec{a}_A\rangle$ e $\langle\vec{a}_B\rangle$ da Fig. X-20.

COMPARE ESSAS ACELERAÇÕES!!

<u>Primeiro</u>: os vetores são paralelos.

<u>Segundo</u>: têm sentidos opostos.

<u>Terceiro</u>: o comprimento do segmento que representa $\langle\vec{a}_B\rangle$ é <u>o dôbro</u> do comprimento do segmento que representa $\langle\vec{a}_A\rangle$.

De modo que

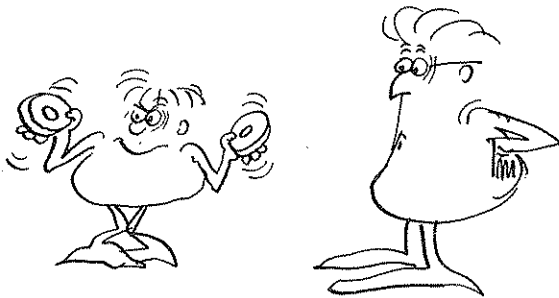
$$\langle\vec{a}_A\rangle = -\frac{1}{2}\langle\vec{a}_B\rangle$$

E definindo

$$\frac{(m_i)_A}{(m_i)_B} = - \frac{<\vec{a}_B>}{<\vec{a}_A>} , \qquad \text{(X-5)}$$

o que generaliza a relação (X-3), obtemos

$$\frac{(m_i)_A}{(m_i)_B} = 2.$$

E finalmente, Martins, você quer medir as massas gravitacionais dês ses dois discos?

Quanto foi que você achou?

$(m_g)_A = 640g$ e $(m_g)_B = 320g$?

Pois é, então veja:

$$\frac{(m_i)_A}{(m_i)_B} = \frac{(m_g)_A}{(m_g)_B} = 2$$

ESTA FOI LEGAL PROFESSOR!

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas estrelados (*) devem ser discutidos em aula, com o seu Professor).

X-1 Uma partícula tem movimento retilíneo uniforme no Laboratório com velocidade igual a 3,0 m/s.

Você anda no Laboratório com movimento retilíneo uniforme, paralelamente à trajetória da partícula, e no mesmo sentido que esta. Sua velocidade no Laboratório é 1,0 m/s.

Qual é a velocidade da partícula no referencial (S) em translação no Laboratório e no qual sua velocidade é nula?

Qual é a aceleração em (S)?

O referencial (S) é um referencial inercial?

X-2 Um carrinho anda com velocidade uniforme ao longo da calha de ar que conhecemos desde o Capítulo IV.

O referencial do carrinho é um referencial inercial?

X-3 (S) e (S') são dois referenciais inerciais.

A aceleração de uma partícula em (S), em determinado instante, é 3,0 m/s^2.

Os dados fornecidos são suficientes para determinar a aceleração da partícula em (S') no mesmo instante?

X-4 Critique a seguinte afirmação:

(S) é um referencial inercial. (S'), também inercial, está em translação circular uniforme em (S).

X-5 (S) é um referencial inercial. Em determinado instante uma partícula tem aceleração de 3,0 m/s^2 em (S). Nêsse mesmo instante, a partícula tem também aceleração de 3,0 m/s^2 em um outro referencial (S') em translação em (S).

Com as informações fornecidas, você pode afirmar que (S') é um referencial inercial?

X-6 (S) é um referencial inercial, e (S') um referencial em translação em (S).

Em determinado instante uma partícula tem velocidade nula tanto em (S) como em (S').

Os dados fornecidos lhe permitem afirmar que (S') é um referencial inercial?

X-7 (S) é um referencial inercial, e (S') um referencial em translação em (S).

Em determinado instante a velocidade de uma partícula é $\vec{v}$ em (S), $\vec{v}'$ em (S'). Você observa experimentalmente que $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ estão sempre ligados pela relação:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

em que $\vec{V}$ é a velocidade de translação de (S') em (S) no instante considerado.

Isso lhe permite afirmar que (S') é um referencial inercial?

X-8 (S) é um referencial inercial. (S') é um referencial em translação em (S).

Em qualquer instante, a aceleração $\vec{a}$ de uma partícula em (S) é igual à sua aceleração $\vec{a}'$ em (S').

Você pode afirmar que (S') é um referencial inercial?

*X-9 No Centro de Pesquisas Lewis, da NASA, existe uma tôrre de 150m de altura utilizada para fazer experiências em ambiente de "gravidade zero".

Fundamentalmente, uma cápsula cai em queda livre, sendo freada no final da queda por espuma de borracha.

1º) Quanto tempo, aproximadamente, dura a queda?

2º) Coloque-se no referencial da cápsula, em translação vertical no referencial terrestre com aceleração constante $\vec{g}$.

Considere uma partícula contida na cápsula, e que não interage mecânicamente com nenhum objeto da cápsula. Se você quiser um exemplo concreto, imagine que um experimentador dentro da cápsula largue uma pedra que êle tem na mão.

Qual é a aceleração da partícula no referencial terrestre?

Qual é a aceleração da partícula no referencial da cápsula?

Qual é o movimento da pedra no referencial da cápsula?

3º) Se, dentro da cápsula, eu ignorar a interação gravitacional, uma partícula que não interage com nenhuma outra é um exemplo perfeito de partícula isolada.

Nessas condições, isto é, ignorando as interações gravitacionais, a cápsula é um referencial inercial?

*X-10 No problema precedente, você terá certamente concluído que uma cápsula - ou um elevador... - em queda livre, é um referencial inercial quando não se leva em consideração a interação gravitacional.

Voltemos então à Apolo 9. Pelo que você sabe, leu, ou viu, você acha que uma nave em órbita é um referencial inercial, esquecendo-se da atração gravitacional?

Você entende agora porque astronautas, lapiseiras, escôvas de dentes... flutuam dentro da nave?

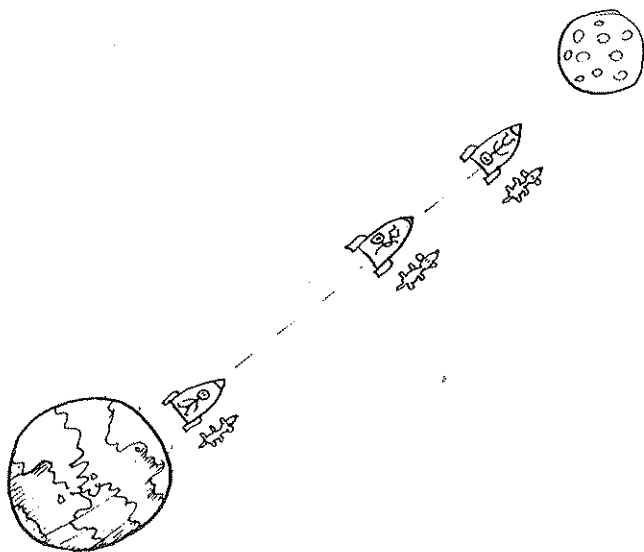
Como é que você interpretaria a chamada "ausência de gravidade" tão cara aos jornais?

X-11 Em 1865, Jules Verne escreveu um dos seus famosos romances de antecipação intitulado: "Da Terra à Lua".

Nêsse livro, Verne imagina que um gigantesco canhão de 300m de comprimento atira um obus cuja velocidade, na saída da bôca, é 11 km/s.

A nave verniana dirige-se para a Lua. À medida que ela se afasta da Terra, a aceleração gravitacional terrestre (dirigida para o centro da Terra), vai diminuindo, enquanto que a aceleração gravitacional da Lua (dirigida para o centro da Lua) vai aumentando.

Enquanto a aceleração devida à Terra supera em módulo a aceleração devida à Lua, Verne representa os viajantes em pé sôbre a extremidade da nave mais próxima da Terra, mantidos pela atração Terrestre.

Na região em que as duas acelerações são diretamente opostas, tendo portanto uma soma nula (*), Verne representa os tripulantes flutuando na nave.

Na vizinhança da Lua, onde a aceleração devida à Lua supera em módulo a aceleração devida à Terra, Verne representa os tripulantes em pé sôbre a extremidade mais próxima da Lua, mantidos pela atração do nosso satélite natural.

No início da viagem, um dos cachorros levados pela expedição, morre. A tripulação dispõe do corpo do animal passando-o para fora da nave através de uma abertura adequada. No entanto, os passageiros observam que o corpo do cachorro acompanha a nave até a Lua.

Discuta criticamente as soluções de Jules Verne, desde o lançamento

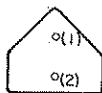
(*) Os pontos de um campo gravitacional em que a aceleração resultante é nula são chamados pontos de <u>libração</u>.

do obus. Õbviamente, o que você aprendeu ao fazer os exercícios X-9 e X-10 lhe servirá agora.

*X-12 Estamos de acôrdo, não é? Um referencial em queda livre é um referencial inercial se ignorarmos as interações gravitacionais.

No entanto, poderia talvez haver situações em que um referencial em queda livre não seria tão fanàticamente inercial assim.

Aí vai uma sugestão:

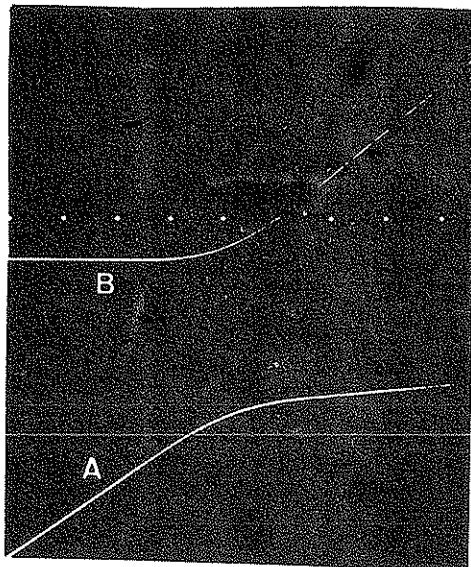
Suponha que uma cápsula em queda livre tenha uma altura de várias centenas de metros. Experiências precisas mostrariam que, no referencial terrestre, as acelerações de duas partículas tais que (1) e (2) difeririam um pouco. A aceleração da partícula (1) seria um pouco menor que a aceleração da partícula (2), porque aquela é mais afastada que esta do centro da Terra.

TERRA

Suponha que, na cápsula em queda livre, dois experimentadores abandonem essas partículas no mesmo instante, sem velocidade inicial em relação à cápsula.

O que vai acontecer às partículas no referencial da cápsula?

A cápsula é um referencial inercial?

*X-13 É indispensável que você entenda (por enquanto qualitativamente), o que acontece numa interação unidimensional entre duas partículas. A Figura que acompanha êsse problema é um registro fotográfico do gráfico s vs t da in

teração (*).

Tome como eixo das posições a borda esquerda da fotografia.

E como eixo dos tempos... bem, acho que qualquer eixo horizontal serve.

O que é que você acha quanto à escolha do eixo dos tempos?

Essa pergunta é de importância fundamental.

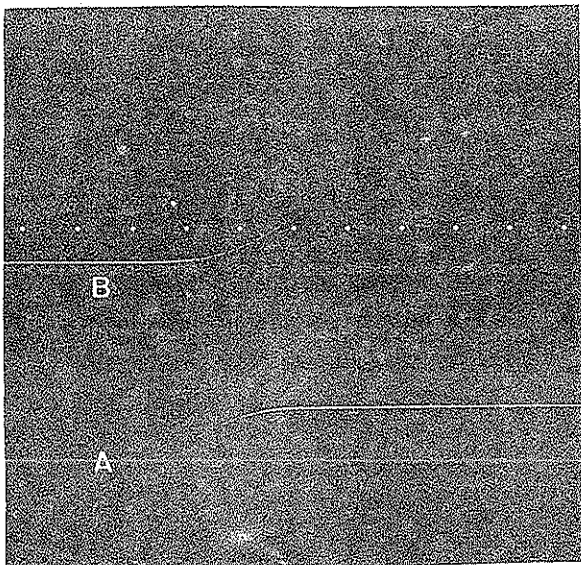
Para respondê-la conscientemente, lembre-se do que dissemos no Capítulo V a propósito de mudanças de eixos de tempo, velocidades relativas, etc.

O que representa uma mudança de eixo dos tempos?

(*) Se você ou o seu Professor estiver interessado em saber como consegui essa fotografia (é fotografia mesmo, não é desenho), fale comigo ou escreva. Não há mistério nenhum, mas não quero alongar desmedidamente êsse livro.

...to as unidades para as posições e para os tempos, poderá esco-
...ariamente, desde que as velocidades que você obtenha sejam ra-
...to bem, a história então é a de um carrinho A inicialmente em mo-
...to ...íneo uniforme no Laboratório, e que se prepara a conversar com o
...icialmente em repouso.
...screva qualitativamente o que acontece a partir de agora. Fale de
...tre os carrinhos, de velocidades, de acelerações, mas por enquan-
...tos; é sòmente assim que você aprenderá a observar e a interpretar.
...m tempo: a linha horizontal de pontos brancos situada na metade
...fotografia foi produzida por um "pisca-pisca" com frequência de 10
... É uma "base de tempo", isto é, um eixo dos tempos já graduado.
...pode utilizá-lo).

...uemos com a fotografia do Problema X-13. Meça (com suas unidades ar-
...rias), as velocidades dos carrinhos antes e depois da interação.
Qual foi a aceleração média do carrinho A durante a interação?
Qual foi, durante o mesmo intervalo, a aceleração média do carrinho B.
Qual é a razão $\frac{(m_i)_A}{(m_i)_B}$ entre as massas inerciais dos dois carrinhos?

...a para o gráfico s vs t de uma interação registrada na fotografia a se-
...r. E sòmente ao olhar (insisto sôbre isto), me diga qual é a razão en-
...massas inerciais dos carrinhos A e B.
Já achou?
Muito bem, agora você pode medir, mexer, virar... e confirmar (ou
seu palpite (palpite raciocinado, claro!).

Problema X-15

X-16 Aí vai mais um gráfico s vs t de uma interação unidimensional de um par isolado de partículas no Laboratório.

a) Qual dos dois carrinhos tem a maior massa inercial? (Sem cálculos!)

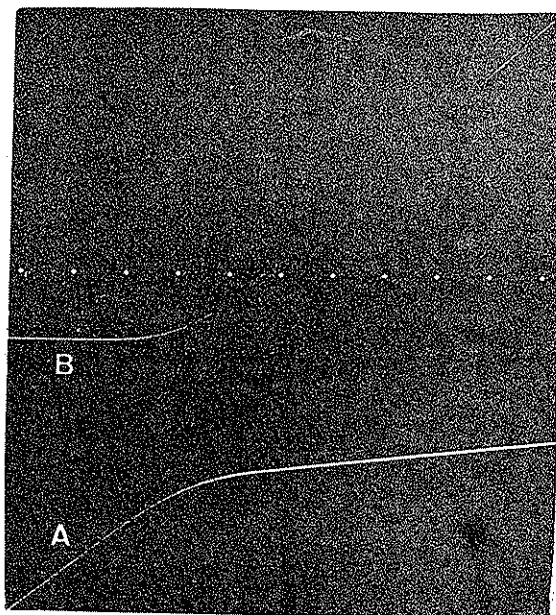
b) Tome como escala vertical (escala das posições): s(cm)= 10 y(cm). Tome como origem dos tempos o primeiro ponto à esquerda da base de tempo (veja Probl. X-13 se já não o fêz). A unidade de tempo

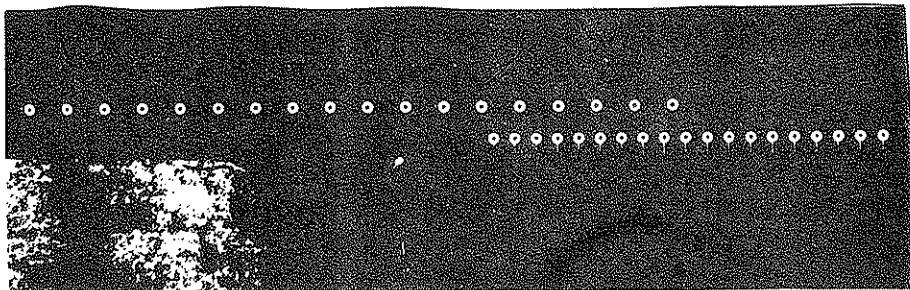
é 1/10s.

c) Em que instante os carrinhos entraram em contato?
   A que distância encontraram-se?

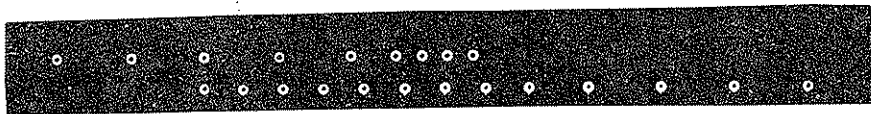
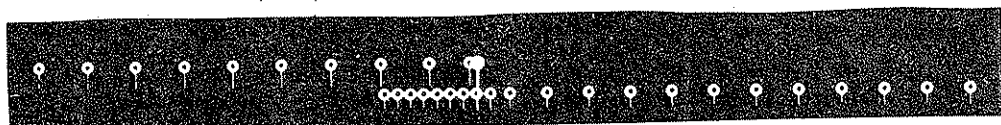
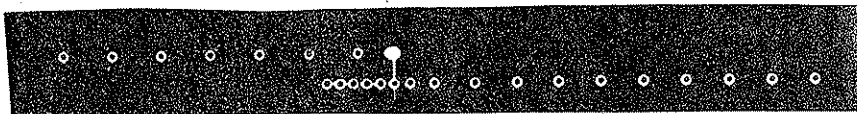
d) Em que instante despediram-se um do outro? A que distância encontravam-se?

e) Em que instante deu-se a maior aproximação entre os dois? Compare, nêste instante, as velocidades dos carrinhos. (Pergunta importante!)

f) Qual foi a aceleração média de cada um dos carrinhos durante a interação?
   Qual é a razão entre as massas inerciais dos dois carrinhos? O seu "palpite" dado em (a) estava certo?

X-17 Você encontrará a seguir o registro estroboscópico dos movimentos de dois carrinhos sôbre a calha de ar.

Houve interação? Justifique sua resposta.

X-18 Você encontrará na página a seguir registros estroboscópicos de interações de dois carrinhos sôbre a calha de ar.

Os carrinhos andam sempre da direita para a esquerda.

Determine em cada casa a razão entre as massas inerciais dos carrinhos (meça simplesmente as acelerações médias).

Problema X-18 (a)

Problema X-18 (b)

Problema X-18 (c)

*X-19 Nas interações registradas nas fotografias do Problema X-18, uma das diferenças entre o caso (a) e os casos (b) e (c) é que em (a) ambos os carrinhos estavam em movimento no Laboratório antes da interação, enquanto que, nos casos (b) e (c), um dêles estava em repouso.

Isto é conceitualmente importante para achar a razão entre as massas inerciais dos carrinhos?

X-20 Considere por exemplo a experiência registrada em (b) no Probl. X-18.

Considere um referencial ligado ao carrinho que vem chegando da direita.

Discuta a "inercialidade" dêsse referencial, no decorrer do tempo.

*X-21 Considere agora o caso (a) do Probl. X-18.

Um dos carrinhos vem da direita e alcança o outro: é o que registrou a série inferior de círculos brancos.

Considere o referencial inercial que, antes da interação, coincide com aquêle carrinho.

Pelo método da fôlha transparente que você aprendeu nos Capítulos V e VI a propósito das trajetórias relativas, construa ponto por ponto (em cada $\frac{1}{20}$ s) as posições sucessivas dos dois carrinhos naquêle referencial. Aconselho-o a fazer essa construção com o maior cuidado, utilizando uma lupa para obter maior precisão.

Você está agora em posse do que poderia ter sido o registro estroboscópico da interação, tal que o conseguiria uma câmera em movimento retilíneo uniforme no Laboratório com uma velocidade igual à velocidade inicial do carrinho que vem da direita.

a) Qual é a razão das massas inerciais dos dois carrinhos, medida nêsse referencial? (Utilize as acelerações médias).
b) Qual é a razão das massas inerciais, medida no Laboratório? (Essa razão já foi medida no Probl. X-18).
c) Compare e comente os resultados obtidos em (a) e (b).

X-22 Duas partículas têm massas inerciais na razão $\frac{4}{3}$. A maior das duas massas gravitacionais é 1,2kg. Qual é a outra?

X-23 Numa interação unidimensional do par isolado de partículas (1) e (2), acha-se

$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = 2,4.$$

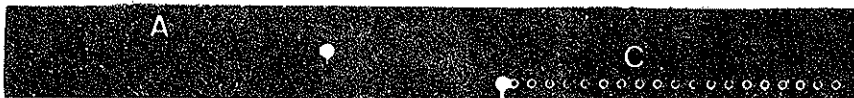
Fazendo interagir agora o par isolado (1) (3), acha-se

$$\frac{|a_1|}{|a_3|} = 0,\dot{6}.$$

Qual é a razão entre as massas inerciais das partículas (1) e (2)? Das partículas (1) e (3)? Das partículas (2) e (3)?

A massa gravitacional da partícula (1) é 0,10kg. Quais são as massas gravitacionais das outras duas partículas?

X-24 Faz-se interagir, na calha de ar, um carrinho A com outro B (fig. a)

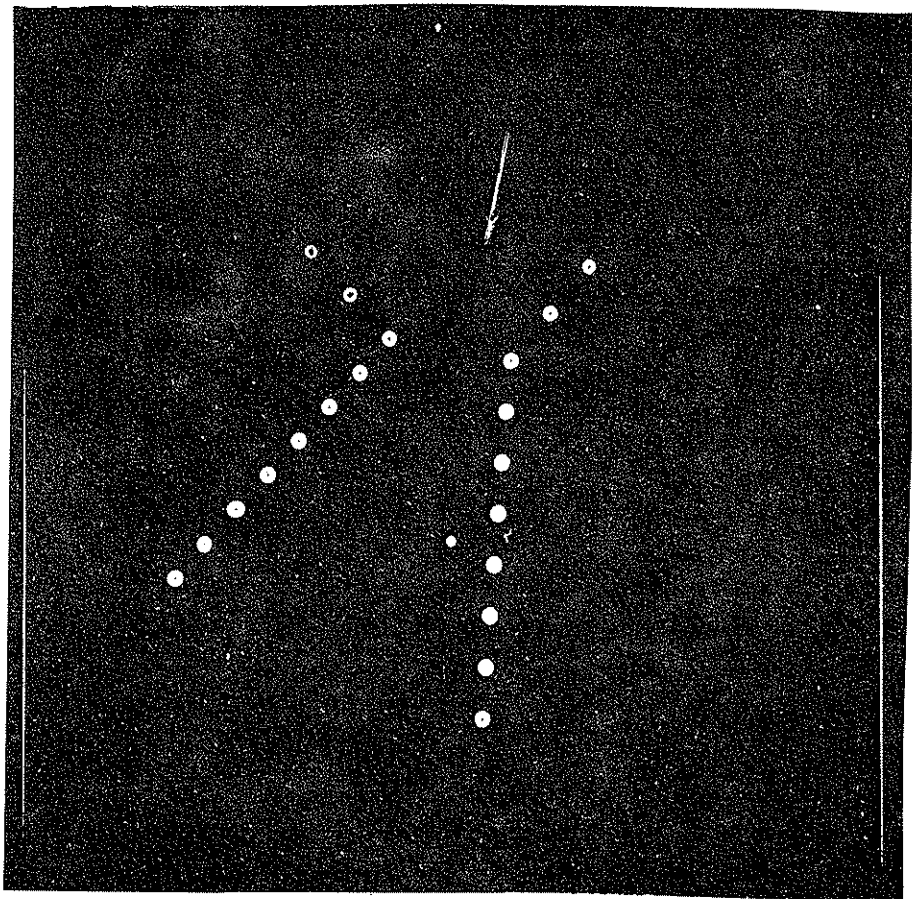
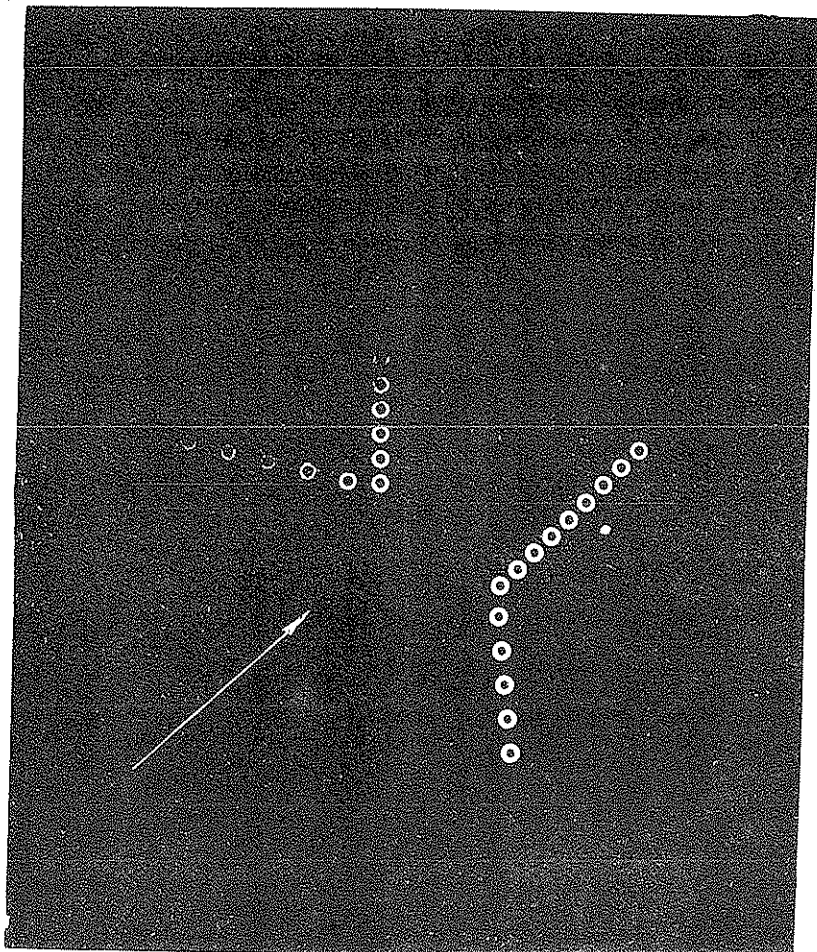
A seguir faz-se interagir (explosivamente) o mesmo carrinho A com um terceiro carrinho C. (fig. b).

A massa do carrinho C é 600g. Quais são as massas dos carrinhos A e B?

*X-25 Depois da conversa com o Martins que tivemos na Seção X-5-2, enquanto estávamos perdidos no espaço sideral, Martins fêz questão de voltar para Lua, e não para Terra, para medir nossas massas gravitacionais.

Eu disse então que a massa do Martins, medida na Lua, era 60kg, e a minha, 80kg.

Não terá havido um êrro meu? Porque veja, a minha massa gravitacional medida na Terra é 80kg. E sabemos que a aceleração da gravidade na Lua é seis vêzes menor que na Terra...

X-26 A Fotografia abaixo representa a interação bidimensional de um par isolado de partículas.

Qual a razão entre as massas dessas partículas?

X-27 Mesmo problema que o precedente para a interação representada abaixo.

*X-28 Não discutimos a questão de saber se a massa é uma grandeza escalar ou uma grandeza vetorial.

É no entanto uma questão importante, e talvez não deveria tê-la deixado para os Problemas.

Mas como você faz todos os Problemas, não faz mal. Não é mesmo?

Acho que você está convencido que massa é uma grandeza escalar. Afinal, quantos números são necessários para medir a massa de uma partícula? A sua resposta depende do referencial (inercial) no qual você faz a medida?

Mas de qualquer maneira é bom você discutir o assunto em aula com seu Professor.

APÊNDICE

X-A-1 GALILEO GALILEI Nasceu em Pisa (Itália) em 1564.

Em 1581, no seu primeiro ano na Universidade de Pisa, ao observar as oscilações de um lustre da Catedral, êle descobre que o período de um pêndulo é (aproximadamente) independente da amplitude.

De 1589 a 1591, êle ensina matemática na mesma Universidade de Pisa, e começa a estudar a queda dos corpos.

Em 1592 transfere-se para Pádua, onde ensina até 1610. Sua atividade científica é intensa. O fato mais marcante daquela época é talvez, em 1609, a descoberta do telescópio, que Galileo constrói combinando duas lentes.

O telescópio permite a Galileo observar a superfície da Lua, satélites de Júpiter e as fases de Venus. Seus trabalhos em Astronomia, conjugados com as observações de Kepler, são a origem direta da mais importante decisão da sua vida de Cientista, decisão que ía sacudir os próprios fundamentos do pensamento ocidental.

Em resumo, Galileo toma posição a favor do Sistema do mundo de Copérnico, que defende o heliocentrismo (Sol no centro do Sistema solar comos planêtas girando em tôrno dêle), contra o Sistema de Aristóteles e Ptolomeo em que a Terra ocupava o centro do Universo.

Perseguido pela Igreja por sustentar Copérnico contra Ptolomeo, Galileo defenderá até o fim da sua vida a liberdade da criação científica.

Êle morre em Firenza em 1642.

Galileo foi provàvelmente o primeiro Físico teórico da história da Ciência. Partindo de definições e axiomas, êle associa a um fenômeno natural um modêlo matemático e pede à experiência a verificação da Teoria.

Êsse método é exemplificado na obra fundamental de Galileo: "Diálogos sôbre duas novas Ciências", escrita na sua maior parte durante a reclusão a que foi condenado pelo Santo Ofício, a partir de 1633. As duas Ciências em questão são por um lado discussões sôbre a resistência dos materiais e por outro lado, estudos sôbre o movimento e a queda dos corpos.

Não há dúvida que é a respeito do movimento dos corpos que Galileo mostra o seu verdadeiro poder criador. É aí, realmente, que se descobre

o primeiro grande Físico. A Cinemática de Galileo e as suas descobertas sôbre o movimento dos projéteis, traduzidas em linguagem moderna, não diferem praticamente em nada do que hoje se ensina.

No entanto, a Cinemática não é tôda a Física. Galileo tinha entendido claramente a importância da aceleração no estudo do movimento, mas recusava-se abertamente a procurar as causas que a produzem.

A transição da Cinemática para a Dinâmica ía ser dada por Newton.

X-A-2 ISAAC NEWTON. Nasceu em Woolsthorpe (Inglaterra) em 1642, no mesmo ano em que tinha morrido Galileo.

Em 1665, Newton obtinha o grau de Bacharel na Universidade de Cambridge. A Grande Peste que começa então a assolar Londres o obriga a retirar-se no campo, e nos dois anos de 1665 e 1666, êle faz suas principais descobertas em Ótica e em Mecânica. Aos 24 anos, Newton já tinha o essencial da obra que viria a ser um dos monumentos da Ciência de todos os tempos.

No entanto, é sòmente vinte anos mais tarde, e por insistência de seu amigo, o astrônomo Halley, que êle se decide a escrever e publicar os resultados das suas descobertas em Mecânica. Em 1686, é publicada a obra principal de Newton, os "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural". Em 1672, tinha êle publicado a sua "Ótica", também escrita durante o seu retiro forçado de 1665-1666.

Newton faleceu em 1727, tendo demonstrado durante tôda a sua vida a modestia que realce ainda mais a grandeza do seu gênio. Pouco antes da sua morte, dizia êle: "...eu fui sòmente uma criança brincando na orla do mar, satisfeito quando eu encontrava um seixo mais polido ou uma concha mais bonita. Mas o vasto oceano da verdade estendia-se diante de mim, inacessível".

Tôda a Mecânica de Newton é denominada por um só pensamento: o objetivo da Física deve ser o estudo das fôrças que governam todos os fenômenos naturais.

E consequentemente, os "Princípios" têm como caráter fundamental a universalidade dos assuntos tratados. Os dois primeiros Livros estudam os movimentos dos corpos submetidos a fôrças de várias naturezas, e preparam o Livro Três, ponto culminante da obra, que Newton intitula: "O Sistema do Mundo". E é verdadeiramente do Sistema do Mundo que se trata: Newton tinha entendido que

a mesma Lei de Gravitação explica o movimento da Lua na sua órbita em tôrno da Terra, e o movimento da maçã que caía no seu pomar.

CAPÍTULO XI

Conservação do momentum linear

XI-1 Introdução.

Êste Capítulo continua a estruturação da Dinâmica, iniciada no Capítulo precedente.

A massa era a primeira grandeza Dinâmica, se aceitarmos como definição dêsse tipo de grandeza: "aquela que se manifesta sòmente numa interação".

Você está de acôrdo?

Para que a massa - gravitacional ou inercial - possa ser medida, é preciso que a partícula converse, ...interage, com outra.

O momentum linear é a segunda grandeza Dinâmica que encontramos.

A sua importância reside no fato que, em qualquer interação, a soma dos momenta (*) lineares permanece sempre, sempre, invariante.

Êste Capítulo nos dará assim a primeira das Grandes Leis de Conservação da Física.

Eis porque, mais uma vez, nunca poderei insistir bastante sôbre a necessidade de prestarmos uma atenção extrema, você e eu, à nossa conversa.

XI-2 Definição.

Chama-se momentum linear de uma partícula ao produto de sua massa pela sua velocidade.

O símbolo universalmente aceito para o momentum linear é $\vec{p}$.

Temos assim:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \qquad \text{(XI-1)}$$

(*) "Momentum" é uma palavra latina que significa movimento. O seu plural é "momenta".

Você deve convencer-se que o momentum linear é realmente uma grandeza vetorial.

Mas sendo a massa um escalar e a velocidade um vetor...

Não é mesmo?

Nas interações unidimensionais, as que nos ocupam principalmente neste Curso, a velocidade pode ser considerada como escalar. E, naturalmente, o momentum também. A relação XI-2 pode escrever-se <u>sòmente nessas interações</u>:

$$\boxed{p = mv} \tag{XI-2}$$

O momentum linear expressa-se em unidade de massa multiplicada pela unidade de velocidade. Se você expressa a massa em quilograma, você deve expressar a velocidade em metro por segundo, e a unidade correspondente de momentum é o

quilograma . metro por segundo (kg.m/s)

Mas se você expressar a massa em grama, a velocidade deverá ser expressa em centímetro por segundo, e o momentum em

grama . centímetro por segundo (g.cm/s)

Você não acha que o Martins está muito civilizado hoje?

XI-3 Volta às interações unidimensionais.

Continuemos a análise das experiências que fizemos no Capítulo precedente.

Você se lembra que um par isolado de carrinhos interage unidimensionalmente, no referencial inercial do Laboratório.

A Fig. XI-1 refere-se à mais uma interação do carrinho A, cuja massa é 600g, e do carrinho B, cuja massa é 400g.

Você tem na mesma figura o registro estroboscópico e o gráfico v vs t da interação.

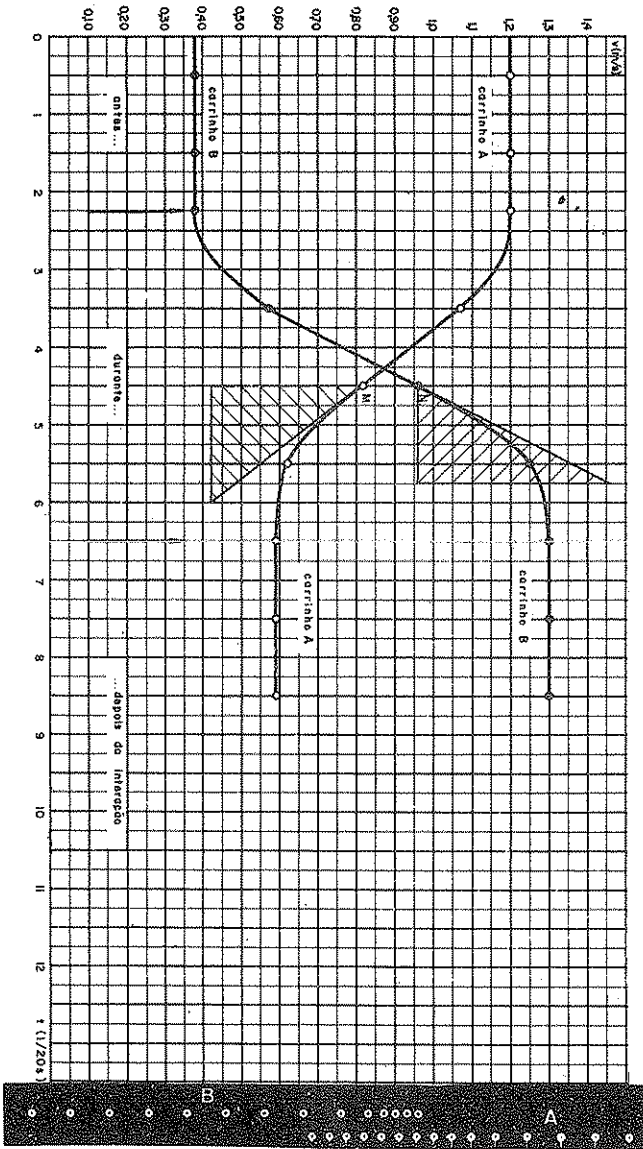



Figura XI-1

XI-3-1 <u>Momentum total antes e depois da interação</u>.

Calcule comigo o momentum total do sistema antes da interação.

O sentido positivo das trajetórias é o sentido do movimento: da direita para a esquerda na fotografia.

Tôdas as velocidades escalares são positivas.

Em consequência os momenta dos carrinhos serão também positivos.

Antes da interação:

- a velocidade do carrinho A é 1,2m/s → $(v_A)_i = 1{,}2$m/s

  o momentum dêsse carrinho é $(p_A)_i = 0{,}60 \times 1{,}2 = 0{,}72$kg.m/s

- a velocidade do carrinho B é 0,38m/s → $(v_B)_i = 0{,}38$m/s

  o momentum dêsse carrinho é $(p_B)_i = 0{,}40 \times 0{,}38 = 0{,}15$kg.m/s

O momentum total do sistema antes da interação é

$$p_i = (p_A)_i + (p_B)_i = 0{,}72 + 0{,}15 = 0{,}87\text{kg.m/s} \qquad \text{(XI-3)}$$

Acho desnecessário insistir sôbre o fato que êsse momentum total é constante.

A soma é constante porque cada parcela, cada momentum individual, é separadamente constante.

Pois antes da interação cada carrinho é isolado em um fererencial inercial... velocidade constante ... momentum constante. Certo?

Muito bem. Vamos ao cálculo depois da interação.

- a velocidade do carrinho A é 0,59 m/s → $(v_A)_f = 0{,}59$ m/s

  o momentum dêsse carrinho é $(p_A)_f = 0{,}60 \times 0{,}59 = 0{,}35$ kg.m/s

- a velocidade do carrinho B é 1,3 m/s → $(v_B)_f = 1{,}3$ m/s

  o momentum dêsse carrinho é $(p_B)_f = 0{,}40 \times 1{,}3 = 0{,}52$ kg.m/s

O momentum total do sistema depois da interação é

$$p_f = (p_A)_f + (p_B)_f = 0,35 + 0,52 = 0,87 \text{ kg.m/s} \qquad \text{(XI-4)}$$

Você já observou que o momentum total do sistema depois da intera - ção é igual ao momentum total antes da interação!

Veja o que aconteceu:

- o momentom do carrinho A variou de...

... variou de:

$$\Delta p_A = (p_A)_f - (p_A)_i = 0,35 - 0,72 = -0,37 \text{kg.m/s}$$

Enquanto que o momentum do carrinho B variava de:

$$\Delta p_B = (p_B)_f - (p_B)_i = 0,52 - 0,15 = +\ 0,37 \text{kg.m/s}$$

Você viu? Δp_A e Δp_B têm mesmo valor absoluto, mas sinais contrários:

$$\Delta p_A = -\Delta p_B \rightarrow \Delta p_A + \Delta p_B = 0$$

E obviamente, se a soma das variações é nula, o momentum total conserva o mesmo valor.

MARTINS E EU

O SENHOR ME DESCULPE MAS ESSA HISTÓRIA DO MOMENTUM TOTAL ANTES DA INTERAÇÃO SER IGUAL AO MOMENTUM TOTAL DEPOIS, NÃO CHEGA A SER NOVIDADE, NÃO É?
VOCÊ ACHA?

ACHO!
É SIMPLESMENTE UMA CONSEQUÊNCIA DA DEFINIÇÃO DA MASSA INERCIAL!
PROVE!

A INTERAÇÃO DURA Δt
$\frac{M_A}{M_B} = -\frac{a_B}{a_A}$
NO CAP. X DEFINIMOS A RAZÃO DAS MASSAS DESSA MANEIRA...

O QUE EQUIVALE A...
$\frac{M_A}{M_B} = -\frac{\Delta v_B/\Delta t}{\Delta v_A/\Delta t} = -\frac{\Delta v_B}{\Delta v_A}$

$\frac{M_A}{M_B} = -\frac{(v_B)_f - (v_B)_i}{(v_A)_f - (v_A)_i}$
OU AINDA...

$M_A(v_A)_f - M_A(v_A)_i = M_B(v_B)_i - (M_B)(v_B)_f$
O QUE EQUIVALE A...

OU SEJA...
$M_A(v_A)_f + M_B(v_B)_f = M_A(v_A)_i + M_B(v_B)_f$

E FINALMENTE...
$(P_{total})_f = (P_{total})_i$

TÁ CERTO! TÁ CERTO
PARABÉNS!

Concluímos com o Martins que o momentum total conserva depois da interação o valor que êle tinha antes porque há, durante a interação, transferência de momentum de uma partícula para a outra.

Mas o que é que acontece durante a interação?

O carrinho A, o que perde momentum no nosso exemplo, dá êsse momentum todo de uma vez?

Ou distribui aos poucos?

Ou põe no Banco para o carrinho B apanhar quando precisar?

XI-3-2 Momentum total durante a interação.

A resposta àquelas perguntas está também contida na definição da razão entre as massas inerciais dos carrinhos.

Vimos no Capítulo X que $\frac{m_A}{m_B} = - \frac{a_B}{a_A}$, em qualquer instante da interação.

Podemos verificar isto mais uma vez no gráfico v vs t da Figura XI-1.

No instante 4,5 $(\frac{1}{20}$ s) a aceleração do carrinho A era $- 5,3\ m/s^2$. E a do carrinho B, $8,0 m/s^2$.

Fiz os cálculos nos triângulos sombreados do gráfico.

Mas você deve verificar êsse cálculos.

Muito bem, então $- \frac{a_B}{a_A} = \frac{8,0}{5,3} = 1,5 = \frac{m_A}{m_B}$.

Tudo como previsto.

Mas, no fundo, o que significa isto?

A aceleração do carrinho A no instante 4,5 $(\frac{1}{20}$ s) é a aceleração média em um intervalo de tempo muito pequeno Δt em tôrno dêsse intervalo.

Tome por exemplo $\Delta t = 1,0 \times 10^{-3}$s. Um milésimo de segundo! Com o fator de escala utilizado em abscissas, um intervalo de um milésimo de segundo é representado por algo menor que meio milímetro.

Pràticamente um ponto feito a lápis.

Pois bem, durante êsse intervalo de $1,0 \times 10^{-3}$s a velocidade do carrinho A diminuiu de $5,3 \times 1,0 \times 10^{-3} = 5,3 \times 10^{-3}$m/s e o seu momentum diminuiu de $0,60 \times 5,3 \times 10^{-3} = 3,2 \times 10^{-3}$kg.m/s.

Durante o mesmo intervalo a <u>velocidade</u> do carrinho B <u>aumentou</u> de $8,0 \times 1,0 \times 10^{-3} = 8,0 \times 10^{-3}$ m/s e o seu <u>momentum aumentou</u> de $0,40 \times 8,0 \times 10^{-3} = 3,2 \times 10^{-3}$ kg.m/s.

Veja só! Em qualquer intervalozinho durante a interação, a variação de momentum de um dos carrinhos é exatamente compensada por uma variação em sentido contrário do momentum do outro.

Como? Você quer mesmo por o colarinho e a gravata?

Vamos lá!

A aceleração de uma partícula é a taxa de variação dv/dt da velocidade, em que <u>dv</u> representa a variação (extremamente pequena) da velocidade durante o intervalo de tempo (extremamente pequeno) <u>dt</u>:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Por seu lado, durante o intervalo <u>dt</u>, o momentum da partícula também varia.

Representando essa variação (extremamente pequena) por <u>dp</u>, você observa que ela é devida à variação <u>dv</u> da velocidade, e tendo-se por definição p = mv segue-se que dp = m dv.

Muito bem.

Voltemos à definição da razão entre massas inerciais:

$$\frac{m_A}{m_B} = -\frac{a_B}{a_A}$$

E transformemos:

$$\frac{m_A}{m_B} = -\frac{dv_B/dt}{dv_A/dt} = -\frac{dv_B}{dv_A} ,$$

o que ainda pode escrever-se:

$$m_A dv_A = - m_B dv_B$$

ou $$dp_A = - dp_B. \qquad (XI-5)$$

O que está lhe dizendo a relação acima?

Ela está lhe dizendo que em qualquer intervalozinho da interação, a variação de momentum de um dos carrinhos é exatamente compensado por uma variação em sentido contrário do momentum do outro.

Mas você já não tinha ouvido isto em algum lugar?

Pois é, quando estávamos ainda... de roupa esporte!

Mas o que importa em tudo isto... de roupa esporte ou de traje formal, é a conclusão:

Se durante a interação cada variação do momentum de uma das partículas é compensada por uma variação em sentido contrário do momentum da outra segue que O MOMENTUM TOTAL DO SISTEMA PERMANECE SEMPRE CONSTANTE.

XI-3-3 Conservação do momentum total.

QUANDO UM PAR ISOLADO DE PARTÍCULAS INTERAGE EM UM REFERENCIAL INERCIAL, O MOMENTUM LINEAR TOTAL DO SISTEMA PERMANECE INVARIANTE.

Medite sôbre essas linhas.

Elas contêm uma das mais fundamentais verdades da Física.

Antes da interação... durante a interação... depois da interação, o momentum total é constante.

Sempre, sempre!

Desde que você o meça em um referencial inercial.

E que não haja ninguém que se "meta" na conversa das duas partículas, é claro.

E agora, uma pergunta muito importante:

O que é que caracteriza a interação de duas partículas?

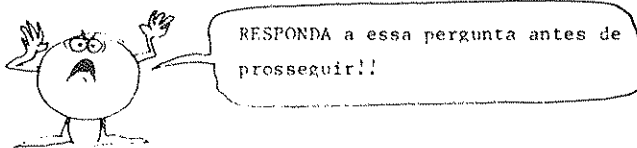
Veja: antes de iniciar-se a interação, o momentum total é constante porque cada um dos momenta individuais é constante.

Depois da interação o momentum total é constante também porque os

momenta individuais o são.

Durante a interação os momenta individuais não são constantes embora a soma o seja.

O que caracteriza então a interação é a transferência de momentum de uma partícula para a outra.

De modo que se, em um referencial inercial, você observa que o momentum de uma partícula está variando, o que você deve necessàriamente concluir?

Certo! Você deve concluir que a partícula em questão está interagindo com pelo menos uma outra partícula.

MARTINS E EU

ESTAMOS EM UM REFERENCIAL INERCIAL?
TANTO QUANTO O LABORATÓRIO POSSA SER INERCIAL, ESTAMOS!

E O QUE VOCÊ CONCLUI ENTÃO?
QUE O PEDAÇO DE GIZ ESTÁ INTERAGINDO COM OUTRA PARTÍCULA! E ESSA PARTÍCULA É A TERRA. MAS... MAS ENTÃO O MOMENTUM DA TERRA TAMBÉM VARIA!

CERTO! É CERTO! E DE QUANTO VARIA?
DA MESMA QUANTIDADE QUE O MOMENTUM DO PEDAÇO DE GIZ, MAS EM SENTIDO CONTRÁRIO.

E QUANTO VALE ESSA VARIAÇÃO?
BEM, O PEDAÇO DE GIZ TEM MASSA DE UMAS DEZ GRAMAS... A VELOCIDADE COM QUE CHEGA NO CHÃO DEVE SER DE UNS QUATRO METROS POR SEGUNDO... A VARIAÇÃO DO MOMENTUM DO PEDAÇO DE GIZ É... É.. 4x10-2 Kg.m/s!

DE MODO QUE, DURANTE A QUEDA DO PEDAÇO DE GIZ, O MOMENTUM DA TERRA DEVE VARIAR TAMBÉM DE 4x10-2 Kg.m/s!
MAS SÔMENTE SE FÔR MEDIDO, EM UM REFERENCIAL INERCIAL!

UÉ! MAS VOCÊ NÃO DISSE QUE O LABORATÓRIO...
NÃO! DISSE QUE ERA PRATICAMENTE INERCIAL... DEPENDENDO DO QUE QUEREMOS FAZER!

SUBLIME!
ORA, SE ESTAMOS NA TERRA, NÃO PODEMOS MEDIR AS VARIAÇÕES DO MOMENTUM DA TERRA, DE MODO QUE PARA MEDIR ESSA VARIAÇÃO DO MOMENTUM, O LABORATÓRIO NÃO SERVE!!
CALMA MARTINS! NÃO É TÃO DRAMÁTICO ASSIM! O QUE ME IMPORTA PARA DETERMINAR SE UM REFERENCIAL É INERCIAL OU NÃO É SUA ACELERAÇÃO. SE SUA ACELERAÇÃO MEDIDA EM UM REFERENCIAL INERCIAL FOR NULA... OU QUASE... ENTÃO O REFERENCIAL É TAMBÉM INERCIAL!

MUITO BEM! DIZIA EU QUE O MOMENTUM DA TERRA DEVE VARIAR DE 4×10-2 Kg.m/s OU 0,04 Kg.m/s. A MASSA DA TERRA É 6×10²⁴ Kg. A VARIAÇÃO DA VELOCIDADE DA TERRA ENQUANTO O PEDAÇO DE GIZ ESTÁ CAINDO É Δv TAL QUE MΔv = Δp OU SEJA...
$\Delta v = \frac{4\times10^{-2}}{6\times10^{24}} = 0{,}7\times10^{-26}$ m/s.

EM QUANTO TEMPO?
MAIS OU MENOS 0,4 s!

DE MODO QUE A ACELERAÇÃO MÉDIA DA TERRA FOI DE...
2×10^{-26} m/s!

XI-3-4 <u>Gráfico p vs t de uma interação unidimensional</u>.

Voltemos à interação registrada na fotografia da Fig. XI-1 e construamos o gráfico momentum vs tempo.

Êsse gráfico está reproduzido na Fig. XI-2 a seguir.

p (kg·m/s)
carrinho A
carrinho B
carrinho A
carrinho B
reta A de ordenada constante
correspondente a 1/2 (momentum total)
t (1/20 s)
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

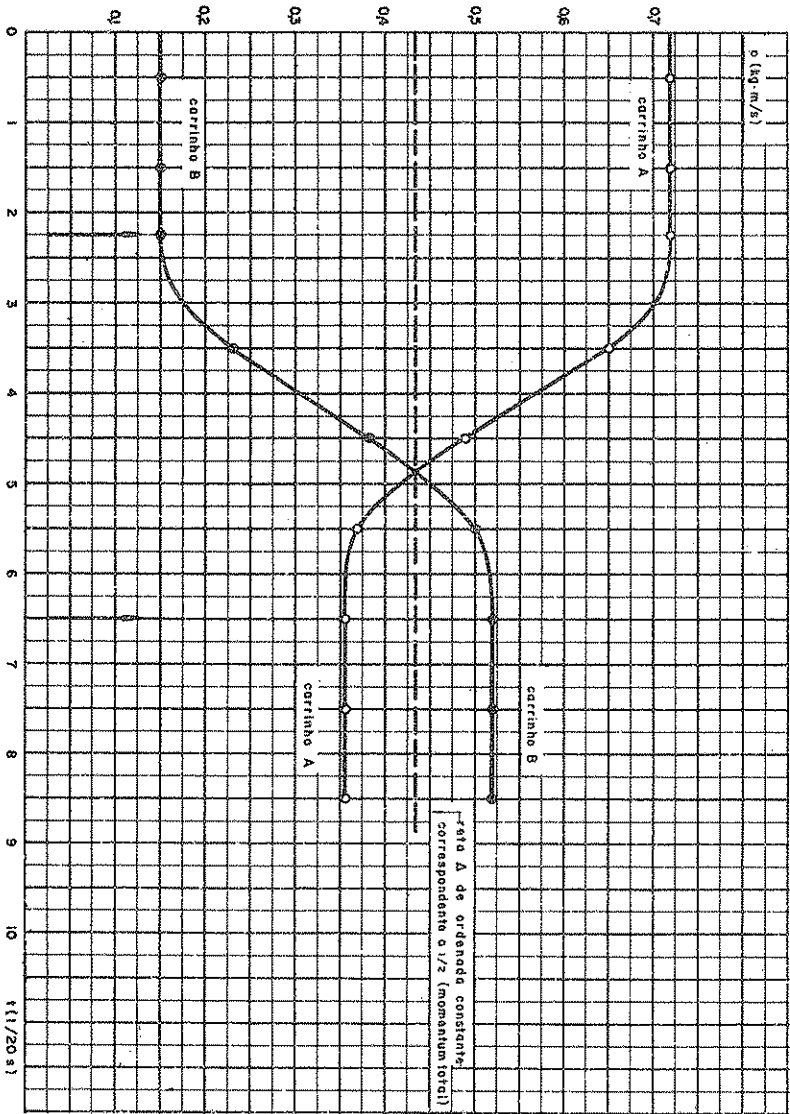



Figura XI-2

O que é que você observa?

O gráfico p vs t é simétrico em relação à linha tracejada de ordenada da constante, e que eu chamei Δ.

Será que é muito difícil demonstrar isto?

Acho que não. Venha comigo!

Sabemos que $p_A + p_B = p =$ Constante.

Então $\frac{1}{2}(p_A + p_B) = \frac{1}{2} p =$ Constante.

E como é que no gráfico p vs t podemos achar um ponto cuja ordenada corresponde a um momentum igual a $\frac{1}{2}(p_A + p_B)$?

É muito simples! Veja a Fig. XI-3. Você tem aí dois pontos A e B de mesma abscissa e cujas ordenadas são y_A e y_B. Qual é o ponto de mesma abscissa que A e B e cuja ordenada é $\frac{1}{2}(y_A + y_B)$?

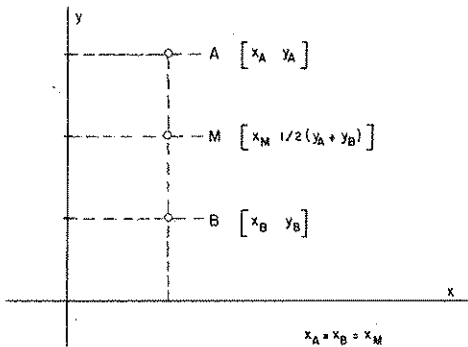



Figura XI-3

É o ponto M meio do segmento AB.

Por quê?

Mas porque a ordenada de M é igual à ordenada de B aumentada do valor de $\overline{BM}$.

E $\overline{BM}$ é obviamente igual a $\frac{1}{2}(y_A - y_B)$, não é mesmo?

Então a ordenada de M é

$$y_M = y_B + \frac{1}{2} y_A - \frac{1}{2} y_B = \frac{1}{2}(y_A + y_B).$$

Voltemos ao gráfico XI-2:

Antes da interação p_A e p_B são individualmente constantes.

A semi-soma $\frac{1}{2}(p_A + p_B)$ é representada então - antes da interação - por uma reta de ordenada constante e que passa "no meio" das retas correspondentes a p_A e p_B respectivamente.

É a reta Δ. De acôrdo?

Começa a interação: p_A e p_B começam a variar.

Mas não variam de qualquer jeito não!

p_A diminui?... p_A aumenta do mesmo valor (absoluto).

p_A aumenta?... p_B diminui do mesmo valor (absoluto).

E então?

Então as curvas que representam p_A vs t e p_B vs t continuam simétricas em relação à reta Δ!

Eis porque o gráfico p vs t da interação é simétrico em relação à reta Δ.

No gráfico, a ordenada da reta Δ é 0,43 kg.m/s.

O momentum total é 0,87 kg.m/s.

Como metade, não é tão mal assim, heim?

XI-3-5 O elefante e a bola de pingue-pongue.

Era uma vez um elefante e uma bola de pingue-pongue que tinham sido esquecidos entre as Nebulosas M-27 e M-8 por uma expedição trans-galáctica, no ano 2001.

A bola de pingue-pongue, ainda vá lá!

Mas o elefante? Ninguém jamais conseguiu saber porque êsse infeliz animal, depois de ter pago passagem inteira, desembarcou por aquelas bandas... e logo com uma bola de pingue-pongue!

Mas como é preciso acreditar nos fatos experimentais, a Fig.XI-4 representa a situação do elefante e da bola de pingue-pongue tal que um Físico da época a registrou, no referencial inercial em que se encontrava.

Figura XI-4

A bola de pingue-pongue estava em repouso, e o elefante flutuava suavemente, em movimento retilíneo uniforme, indo em direção da bola com velocidade de $\underline{v}$.

Para saber o que aconteceu mais ou menos, imagine que o Martins esteja montado sôbre o elefante.

Martins vê a bola de pingue-pongue vir na direção do elefante, em movimento uniforme com velocidade $-\underline{v}$. Certo? Veja a Fig. XI-5.

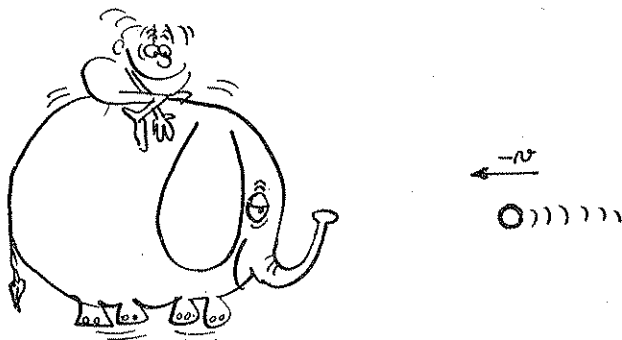
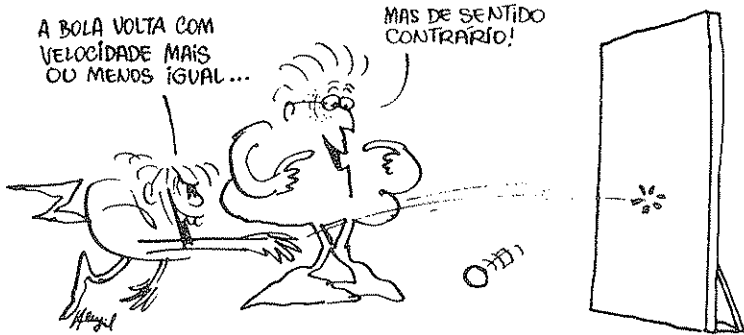
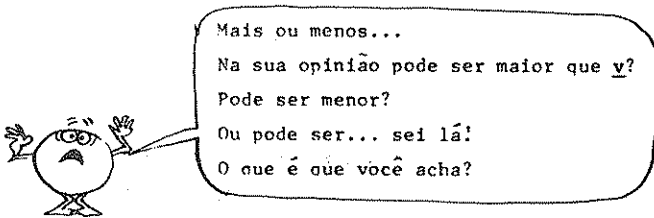



Figura XI-5

Mas, para uma bola de pingue-pongue, ir ao encontro de um elefante pa

rado, é a mesma coisa que ir ao encontro de uma parede, não é mesmo?

E o que acontece quando você joga uma bola de pingue-pongue ou uma bola de tênis contra uma parede?

Ah! então para o Martins a bola repica do elefante com velocidade "mais ou menos" igual a v.

...Vamos dizer... um pouco menor, deixando as razões para o Capítulo XIV.

Para o Martins montado sôbre o seu elefante, a bola se afasta dêle, e do elefante, com velocidade um pouco menor que v.

Mas para o Físico no seu referencial inercial, o elefante estava se movendo com velocidade v, antes da colisão com a bola.

E depois da colisão?

Vamos lá, chame a sua intuição física!

Como? Você está dizendo que uma bola de pingue-pongue no caminho de um elefante não é obstáculo que conte? Perfeito! Acho também que o elefante nem toma conhecimento.

De modo que depois da interação com a bola êle continua tranquila - mente com velocidade v.

Então, voltando a nosso Físico no seu referencial inercial, êle vê o elefante e o Martins i- com velocidade v, enquanto que o Martins vê a bola se afastar dêle com velocidade pouca coisa inferior a v.

Você conclui que no referencial inercial do Físico, a bola anda com velocidade...

Vamos! Composição de velocidades!..

v + pouquinha coisa menor que v = pouquinha coisa menor que 2v.

Ah! Depois da interação a situação no referencial inercial é a seguinte: (Fig. XI-6):

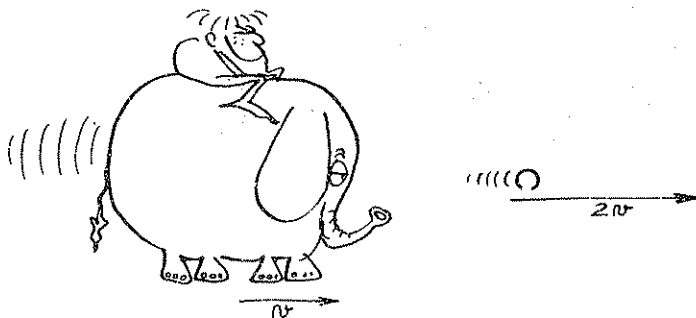



Figura XI-6

(Deixei o Martins no elefante porque êle ía fazer uma bagunça danada se não deixasse).

O gráfico v vs t da interação é mais ou menos o seguinte:

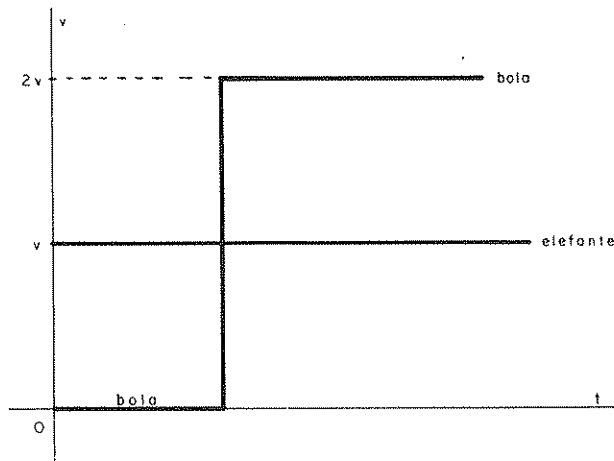



Figura XI-7

Por quê razão será que eu representei a velocidade da bola por um "degrau" durante a interação? Eu não vou responder a essa pergunta...

E como será o gráfico p vs t da interação entre o elefante e a bola de pingue-pongue?

O momentum do elefante conserva-se sempre constante. Já discutimos isto. O elefante ignora pràticamente a interação.

E o momentum da bola?

Ora, ora! Se o momentum do elefante se conserva constante, o momen-

tum da bola também tem que se manter constante, não é mesmo?

Como? você diz que é impossível?

Ah! já sei! Você diz: a bola estava inicialmente em repouso. Momentum zero.

Depois da interação, ela vai embora com o dôbro - ou quase - da velocidade do elefante! Como é que o seu momentum pode continuar nulo? Isto não é sério!

Paciência!... e calculemos um pouco.

A massa do elefante - não era dos maiores - era 2×10^3kg e sua velocidade, 10m/s. O momentum do elefante (que ignoro, repito, uma mísera bola de pingue-pongue), conserva-se igual a $2 \times 10^3 \times 10 = 2 \times 10^4$ kg.m/s.

A massa da bola de pingue-pongue é 40g, ou melhor, 4×10^{-2}kg.

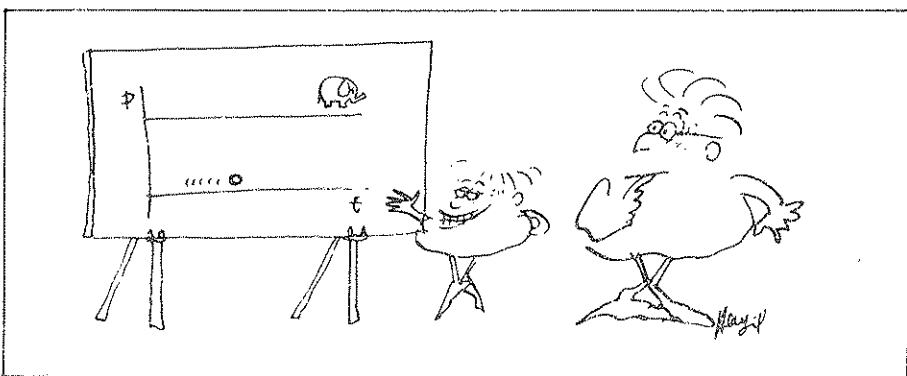
Antes da interação, momentum nulo.

Depois da interação, velocidade de, digamos, 20m/s.

Momentum?... $4 \times 10^{-2} \times 20 = 0,8$kg.m/s.

MARTINS E EU

JÁ ENTENDI! O SENHOR QUER DIZER QUE, EM COMPARAÇÃO COM O MOMENTUM DO ELEFANTE QUE SERIA P O MOMENTUM DA BOLA SERIA "p" E CONSEQUENTEMENTE É DESPREZÍVEL.

ISSO! E APROVEITE O QUADRINHO DE BAIXO E ME FAÇA O GRÁFICO p e t DA INTERAÇÃO...

Demoramos um pouco nêsse problema do elefante e da bola de pingue--pongue.

A razão é que eu queria que você entendesse, e se convencesse, de uma coisa muito importante: QUANDO, DAS DUAS PARTÍCULAS QUE INTERAGEM, UMA TEM MASSA MUITO MAIOR QUE A OUTRA. A VELOCIDADE DA PARTÍCULA DE MAIOR MASSA VARIA MUITO POUCO EM COMPARAÇÃO COM A OUTRA, EMBORA AS VARIAÇÕES DE MOMENTUM SEJAM SEMPRE IGUAIS EM MÓDULO.

A importância prática disto aparecerá mais tarde quando estudaremos como se divide entre as massas uma energia disponível.

No fundo, a história do pedaço de giz e da Terra, que discutimos com o Martins na Seção XI-3-3, não era conceitualmente a mesma coisa?

E agora, estude o problema XI-25.

É o mesmo problema, só que o elefante está parado, enquanto a bola está em movimento.

Cada elefante se diverte como pode...

XI-4 <u>Conservação do momentum nas interações bidimensionais.</u>

Demos de novo um passeio rápido pelas interações bidimensionais.

XI-4-1 <u>O momentum linear, grandeza vetorial.</u>

Repito ràpidamente o que foi dito na Seção XI-2.

A velocidade de uma partícula é uma grandeza vetorial.

O momentum obteve-se multiplicando a velocidade vetorial $\vec{v}$ pelo escalar <u>m</u> (massa).

De modo que o momentum

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \qquad \text{(XI-6)}$$

é uma grandeza vetorial (Fig. XI-8).

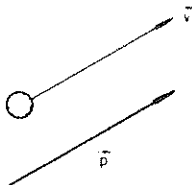



Figura XI-8

Observe que essa definição é válida em qualquer referencial.

O que sòmente é válido nos referenciais inerciais é a conservação do momentum total de um sistema isolado.

XI-4-2 Conservação do momentum total de um sistema isolado.

A Fotografia da Fig. XI-9 é o registro estroboscópico da interação entre dois discos na mesa de ar: o disco A tem massa igual a 600g. O disco B tem massa igual a 300g.

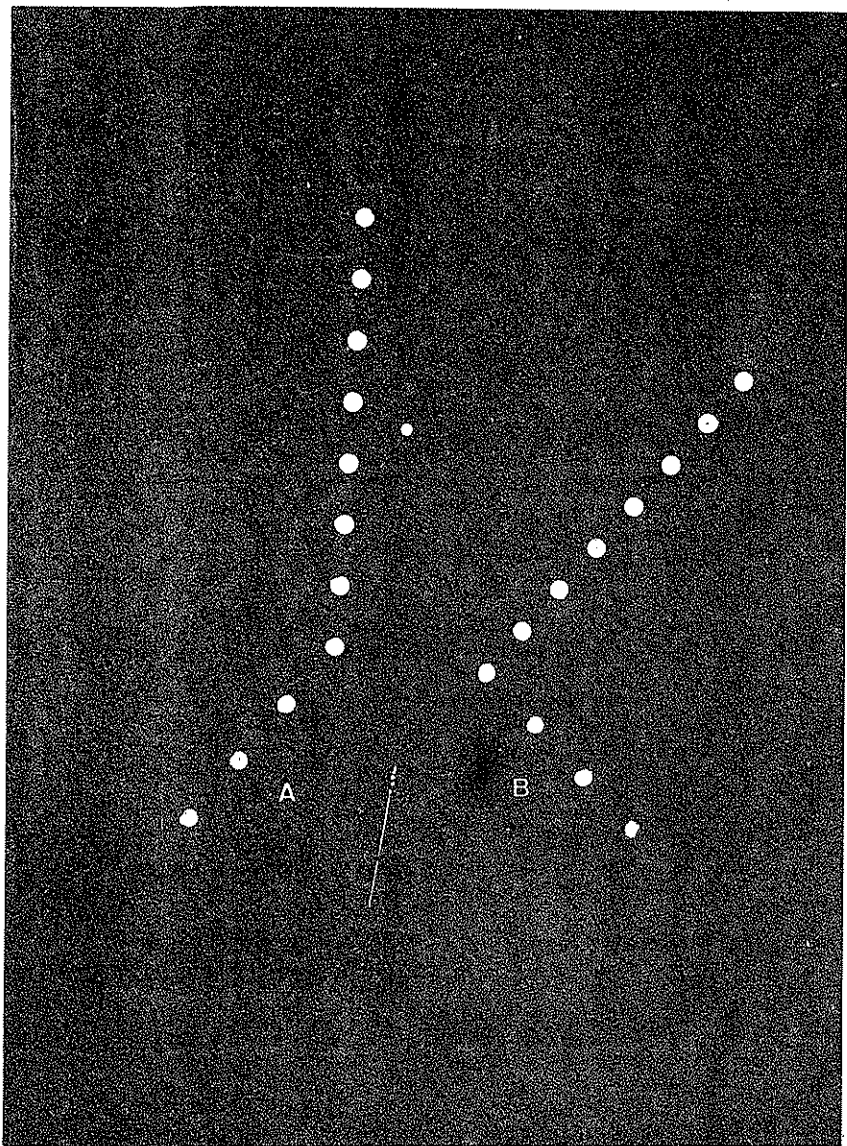



Figura XI-9

Transportei para uma fôlha de papel transparente as velocidades $(\vec{v}_A)_i$ e $(\vec{v}_B)_i$ antes da interação, tomando como unidade de tempo dois intervalos sucessivos entre flashes. (Fig. XI-10).

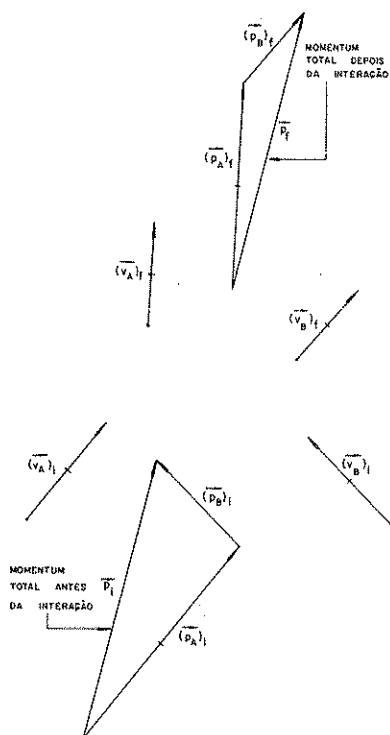



Figura XI-10

Da mesma forma, transportei as velocidades $(\vec{v}_A)_f$ e $(\vec{v}_B)_f$ depois da interação.

Para os momenta, e desde que a unidade de velocidade é arbitrária, observo que a única coisa que importa é a <u>razão</u> entre as massas, e não os valores reais dessas massas.

Dei então ao disco B a massa 1 em unidade arbitrária, e ao disco A a massa 2, na mesma unidade. De acôrdo?

Construi os momenta iniciais $(\vec{p}_A)_i$ e $(\vec{p}_B)_i$, cuja soma é $\vec{p}_i$.

Construi também os momenta finais $(\vec{p}_A)_f$ e $(\vec{p}_B)_f$ cuja soma é $\vec{p}_f$.

Compare os vetores $\vec{p}_i$ e $\vec{p}_f$: êles são iguais!

Mesma direção, mesmo sentido, mesmo módulo.

O que é que você conclui?

Você deve concluir que o momentum vetorial total de um par isolado de partículas que interagem em um referencial inercial (aqui o Laboratório) é o mesmo antes e depois da interação.

A análise do que acontece durante a interação mostra que, como no caso unidimensional, o momentum total sempre se conserva constante.

Desde que seja medido em um referencial inercial.

E desde que o sistema que interage seja isolado.

Está claro que, durante a interação, os momenta individuais das partículas A e B variam (Fig. XI-11).

$\overline{dp_A}+\overline{dp_B}=0$

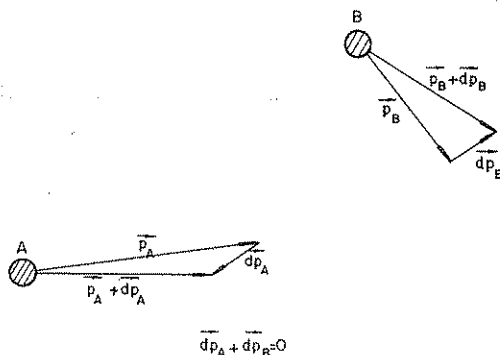



Figura XI-11

Mas não variam de qualquer jeito não!

Variam de modo tal que durante um mesmo intervalo de tempo <u>dt</u> as variações individuais $d\vec{p}_A$ e $d\vec{p}_B$ sejam <u>sempre</u> diretamente opostas.

Mesmo módulo, mesma direção, mas sentidos contrários.

De modo que, <u>sempre</u>,

$$d\vec{p}_A + d\vec{p}_B = 0.$$

E se a soma das variações individuais é sempre nula você conclui...

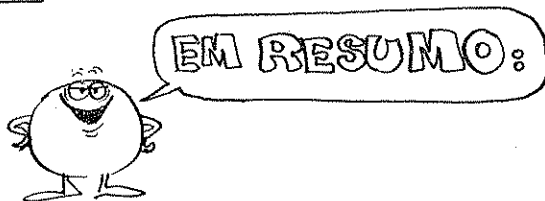
O QUE É QUE VOCÊ CONCLUI?!

Ainda bem que o Martins estava por aí perto, heim moçada?

Pois é! Você conclui que o momentum total do sistema é constante: antes, durante, e depois da interação!

Para sistemas isolados, e em referenciais inerciais: $\vec{p}_{total}$ = Constante	(XI-7)

E mais uma vez, a interação caracteriza-se por uma <u>transferência de</u>

momentum de uma partícula para outra.

Fomos apresentados à segunda grandeza dinâmica.

Primeiro foi a massa.

Agora, o momentum linear.

O momentum linear obtém-se multiplicando pela massa m, a velocidade $\vec{v}$ da partícula:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Numa interação de um sistema isolado de partículas, em um referencial inercial, o momentum total do sistema permanece invariante.

A interação é caracterizada por uma transferência de momentum de uma partícula para outra.

Estamos no coração da Dinâmica!

Os dois próximos Capítulos responderão às duas perguntas seguintes:

1) Será que existiria, por acaso, um referencial em que o momentum total de um sistema isolado fôsse nulo?

2) Se uma interação é caracterizada por uma transferência de momentum de uma partícula para outra, como é que se opera essa transferência? Qual é o agente responsável?

PROBLEMAS PROPOSTOS

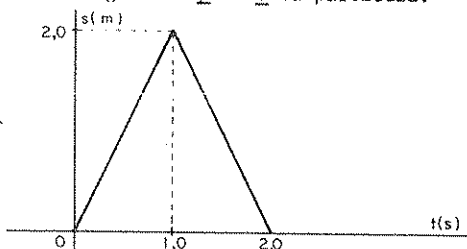
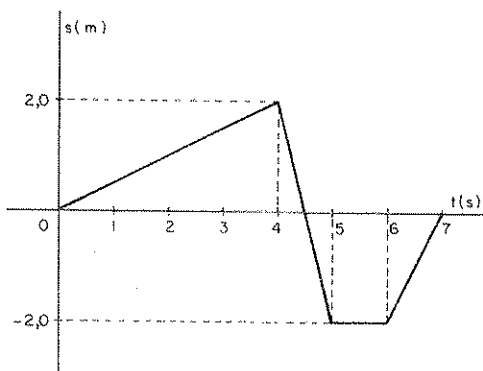
(Os problemas estrelados (*) devem ser discutidos em aula, com o seu Professor).

XI-1 Um automóvel cuja massa é $1,0 \times 10^3$kg anda a 72km/h ao longo de uma estrada retilínea.

Qual é o momentum linear do carro no referencial terrestre?

XI-2 O gráfico s vs t de uma partícula está representado abaixo.

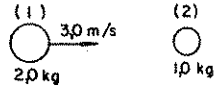
A massa da partícula é 1,2kg.

Construa o gráfico p vs t da partícula.

XI-3 Mesmo problema para a partícula de massa 2,0kg cujo gráfico s vs t é representado abaixo.

XI-4 Em um referencial inercial, uma partícula (1) de massa 2,0kg e com velocidade igual a 3,0m/s vai colidir unidimensionalmente com outra partícula (2) de massa 1,0kg, inicialmente em repouso.

O sistema das duas partículas está isolado das interações externas.

Depois da colisão a partícula (1) continua indo para a direita com velocidade de 1,5m/s.

(1) 3,0 m/s 2,0 kg (2) 1,0 kg

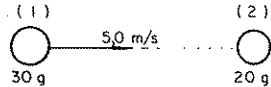
Qual é a velocidade da partícula (2)?

XI-5 Problema análogo ao precedente.

(1) 5,0 m/s 30 g (2) 20 g

Partícula (1):

massa: 30g

velocidade inicial 5,0m/s (positiva)

+

Partícula (2):

massa: 20g

velocidade inicial: zero

velocidade final: 4,0m/s (positiva)

Qual é a velocidade final da partícula (1)?

XI-6 Outro problema de colisão unidimensional:

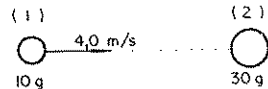
(1) 4,0 m/s 10 g (2) 30 g

Partícula (1):

massa: 10g

velocidade inicial: 4,0m/s (positiva)

velocidade final: -1,0m/s (negativa!)

+

Partícula (2):

massa: 30g

velocidade inicial: zero

Qual é a velocidade final da partícula (2)?

XI-6 Interação unidimensional em um referencial inercial. Uma partícula de massa 1,5kg e com velocidade igual a 4,0m/s colide com outra partícula de massa 0,5kg inicialmente em repouso.

Depois da colisão as duas partículas continuam juntas. (Imagine por exemplo que uma delas é uma bola de massa de vidraceiro).

Qual é a velocidade do conjunto depois da interação?

XI-7 E mais outra!

A partícula (1) de massa 40g e velocidade inicial 6,0m/s colide com a partícula (2) de massa 20g inicialmente em repouso.

Depois da interação a velocidade da partícula (1) é 4,0m/s.

Qual é a velocidade da partícula (2).

O que você conclui?

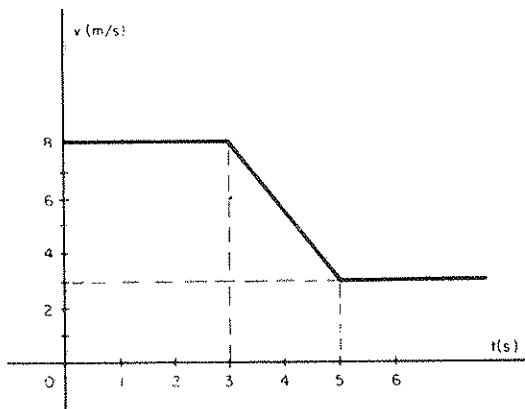
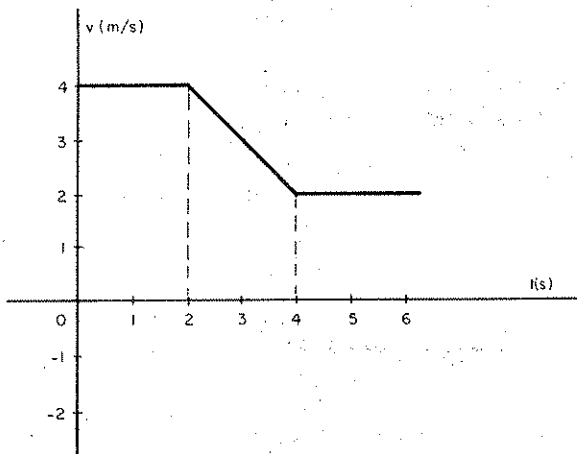
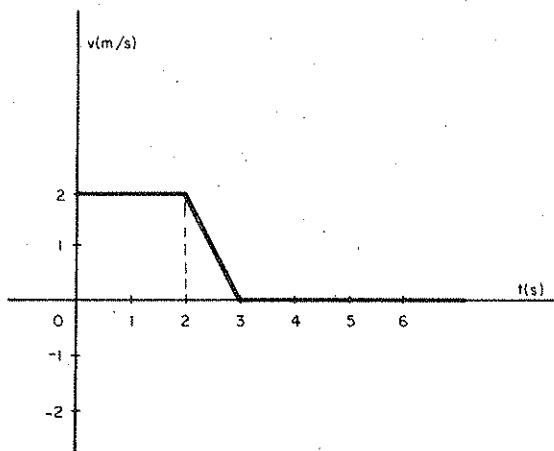
Nos problemas XI-8 a XI-11, são dados a massa e o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ (esquematizado) de uma partícula que interage unidimensionalmente com outra, com um referencial inercial. A massa dessa segunda partícula é também dada, assim como sua velocidade inicial.

Construa o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ da segunda partícula.

*XI-8

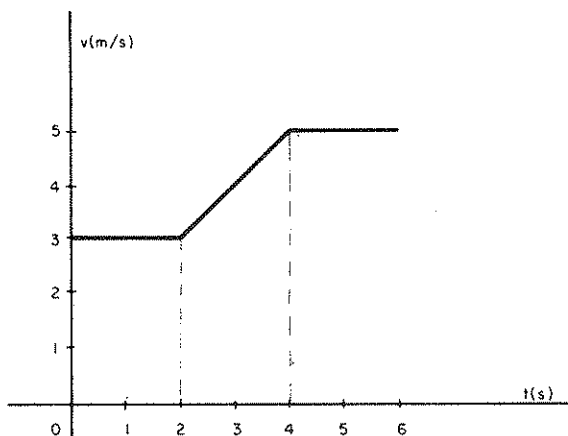
$m_1 = 50g$

$m_2 = 30g$

$(v_2)_i$ = zero

*XI-9
m_1 = 0,40kg
m_2 = 0,20kg
$(v_2)_i$ = -2,0m/s
v (m/s)
4
3
2
1
-1
-2
t(s)
0
1
2
3
4
5
6
*XI-10
m_1 = 1,0kg
m_2 = 1,0kg
$(v_2)_i$ = -2,0m/s
v(m/s)
2
1
-1
-2
t(s)
0
1
2
3
4
5
6

*XI-11

$m_1 = 10g$

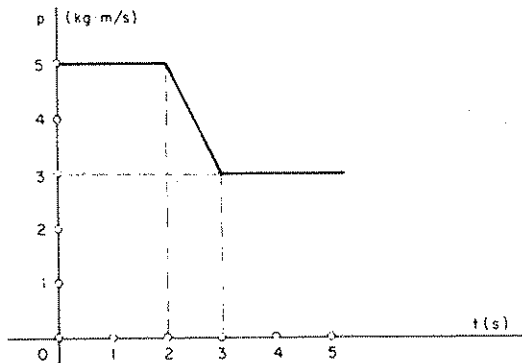
$m_2 = 20g$

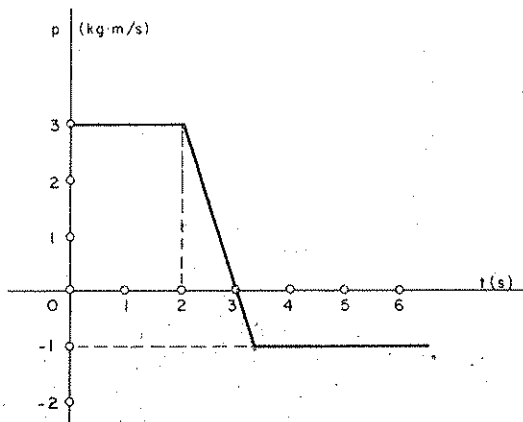
$(v_2)_i = 3,0m/s$

*XI-12 Construa o gráfico p vs t das interações descritas nos problemas XI-8 a XI-11.

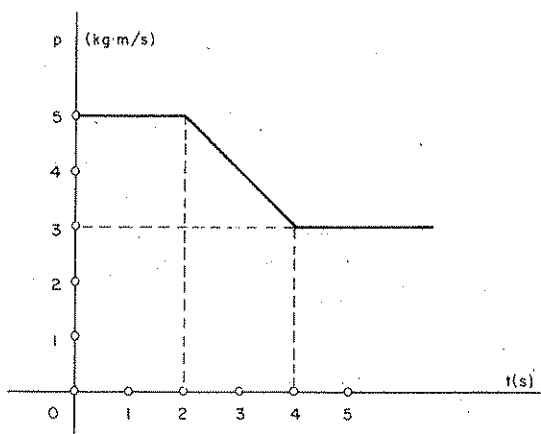
Nos problemas XI-13 a XI-16, é dado o gráfico p vs t, (esquematizado), de uma partícula que interage unidimensionalmente com outra, em um referencial inercial. É dado também, em determinado instante, o valor do momentum da segunda partícula.

Construa o gráfico p vs t dessa partícula.

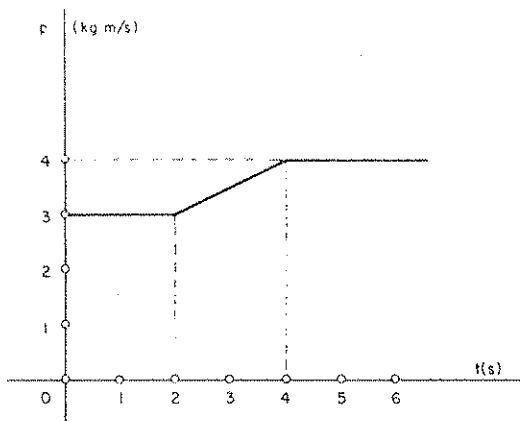
*XI-13

em $t = 0$, $p_2 = 0$

*XI-14

em $t = 4{,}0s$
$p_2 = 3{,}0 kg.m/s$

*XI-15

em $t = 5{,}0s$
$p_2 = 3{,}0 kg.m/s$

*XI-16

em $t = 1{,}0s$

$p_2 = 1{,}0 kg.m/s$

XI-17 Depois de uma interação unidimensional entre duas partículas, em um referencial inercial, ambas as partículas têm o mesmo momentum linear.

Isto significa necessàriamente que as partículas têm a mesma velocidade, e consequentemente andam juntas?

XI-18 Volte ao gráfico da Fig. XI-1: é o gráfico v vs t de uma interação. As duas curvas se encontram em um ponto cuja abscissa é 4,3s. Interprete fìsicamente o sentido dêsse ponto de encontro.

Vá agora ao gráfico p vs t correspondente, na Fig. XI-2. As duas curvas encontram-se em um ponto cuja abscissa é 4,7s.

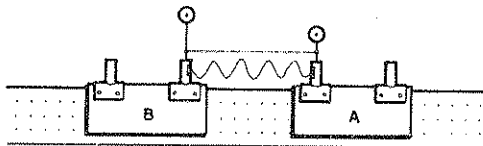
Será que não houve êrro na construção dêsses gráficos - ou pelo menos de um dêles - ?

Os dois pontos de encontro não deveriam ter a mesma abscissa?

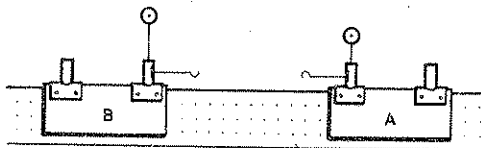
*XI-19 Numa calha de ar, dois carrinhos A e B de massas respectivas 600g e 400g, estão em repouso, com uma mola comprimida entre os dois. Êles são impedidos de afastar-se um do outro por um fio prêso em cada um.

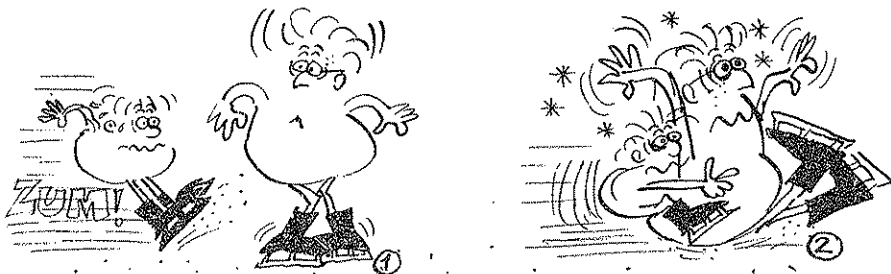
Queima-se o fio. Um segundo depois, o carrinho A encontra-se a 50cm

de sua posição inicial, com uma velocidade de 0,80m/s.

Quais são, no mesmo instante, a posição e a velocidade do carrinho B?

*XI-20 Continuemos brincando com carrinhos.

Os carrinhos A e B (m_A = 600g, m_B = 400g) são munidos de ferrôlhos: quando interagem, permanecem juntos.

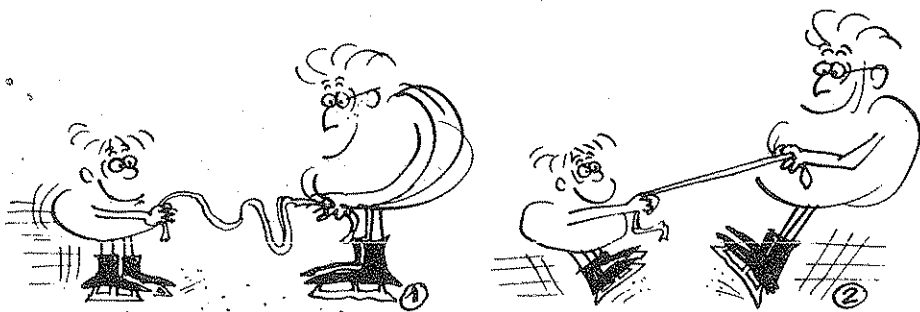
Você lança o carrinho B para a direita com velocidade de 3,0m/s. Com que velocidade, e em que sentido você deve lançar o carrinho A para que o conjunto dos dois carrinhos permaneça em repouso no Laboratório, depois da interação?

*XI-21

AQUELA VEZ QUE EU FUI PATINAR COM O MARTINS...

A massa do Martins é 60kg, e a minha, 80kg.

O Martins me atropelou a 40km/h.

Com que velocidade fomos embora depois do atropelamento?

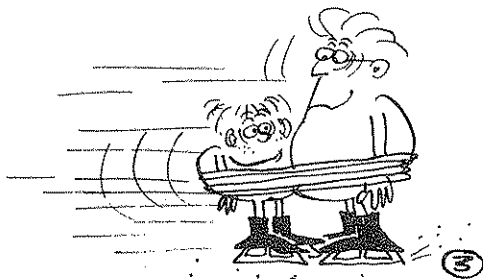
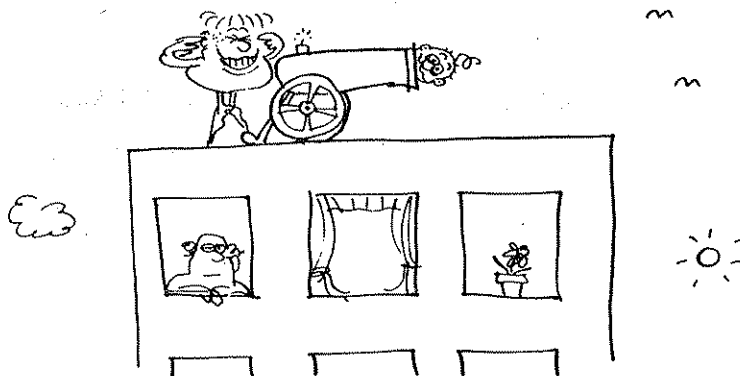
*XI-22

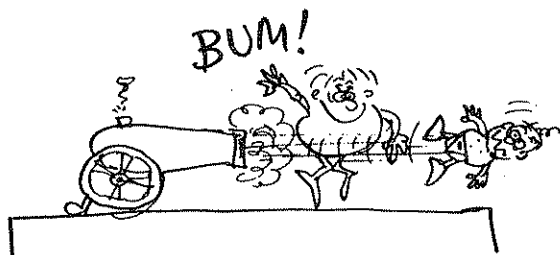
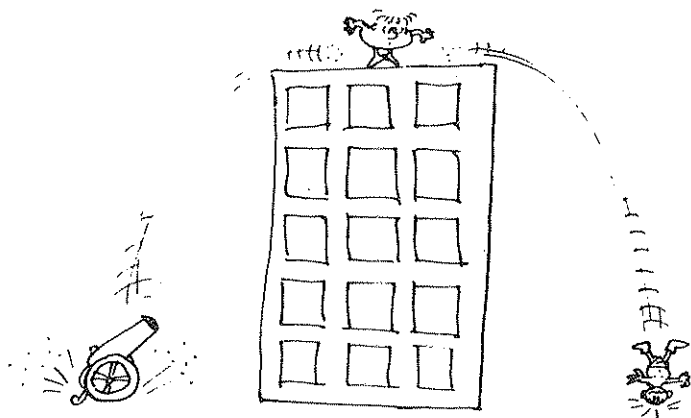
AQUELA OUTRA VEZ QUE EU FUI PATINAR COM O MARTINS...

Aquela outra vez, o Martins quiz a tôda fôrça levar uma corda. Dizia êle que assim êle me ajudaria a me aguentar no gêlo.

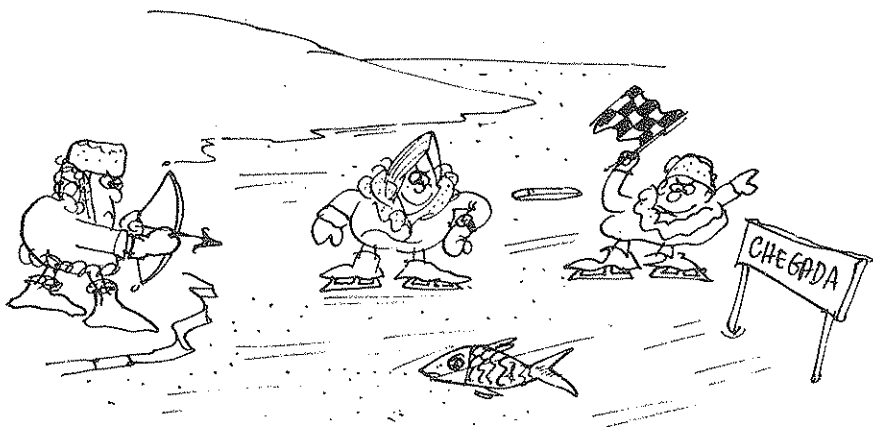
Quando eu o vi chegar a 40km/h, eu comecei a puxar a corda.

O atropelamento foi tão violento que acabamos indo embora amarrados um ao outro.

Com que velocidade?

Ou eu não lhe dei dados suficientes para concluir?

*XI-23

Bem que eu tinha avisado ao Martins de não ir treinar de "homem-canhão" no terrace do edifício.

Mormente que o homem-canhão não era êle, e sim o irmão caçula!

Como o piso era muito escorregadio, na hora de disparar, o irmãozinho foi de um lado e o canhão de outro.

O canhão, de 120kg, foi aterrizar a uns 20m do prédio.
Onde é que o Martins foi recuperar o irmãozinho, de 40kg?

XI-24

Um esquimó queria saber a velocidade da flecha que êle usa para fis gar peixes.

O processo utilizado é representado na fotografia acima. O esquimó dispara uma flecha de 0,20kg num peixe congelado de 1,0kg em repouso sôbre a superfície lisa de um lago também congelado.

Um cronometrador e um juiz de chegada concluem que depois da flecha ter se fincada no peixe, o conjunto flecha-peixe percorre 20m em 3,0s.

Qual é a velocidade da flecha?

XI-25 Outro problema do elefante e da bola de pingue-pongue.

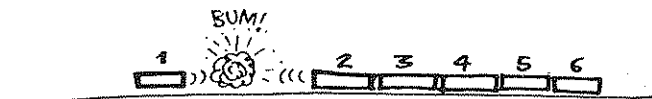
Os dados são os mesmos que os da seção XI-3-5. Agora porém o elefante está em repouso no referencial inercial, e a bola se dirige para êle com velocidade v.

Construa os gráficos v vs t e p vs t da interação no referencial inercial.

Construa êsses mesmos gráficos no referencial do elefante.

*XI-26 O novo brinquedo do Martins é um tremzinho de seis caixas de fósforos que pode andar sôbre uma mesa de ar horizontal.

Entre duas caixas consecutivas há uma espoleta. O Martins pode disparar sucessivamente essas espoletas por contrôle remoto.

No início o tremzinho das seis caixas está em repouso sôbre a mesa.

Martins dispara a espoleta colocada entre as caixas (1) e (2). A caixa (1) vai embora com velocidade de 6,0m/s em relação ao resto do trem, formando pelas caixas (2) (3)... (6).

Um segundo depois, Martins dispara a segunda espoleta. A caixa (2) vai embora com a mesma velocidade de 6,0m/s em relação ao resto do trem, formado pelas caixas (3) (4)... (6).

E assim por diante...

Qual será a velocidade da caixa (6), depois de disparada a última espoleta?

Resolva gràficamente!

*XI-27 O problema precedente é um modêlo simplificado, e muito fácil de entender, da propulsão por foguete.

Basta que você imagine que o trem é substituído por uma cápsula (que faz o papel da caixa nº 6), expulsando para trás uma porção de "caixinhas" (na realidade, moléculas de gases produzidos pela combustão da mistura propulsora).

Discuta êsse assunto com seu Professor.

E discuta particularmente o ponto seguinte (voltando ao problema XI-26):

Você quer, em última análise, dar à caixa nº 6 a maior velocidade possível sendo que as regras do jôgo são as seguintes: 1) você dispõe de uma certa massa de combustível (as cinco primeiras caixas); 2) você deve dividir êsse combustível em frações iguais (no Problemas XI-26, cinco frações iguais); 3) qualquer que seja o número de frações que você escolhe, cada fração, ao ser expelida para trás, tem sempre a mesma velocidade de 6,0m/s em relação ao res-

to.

Dito isto, quantas frações escolherá?

Uma? Isto é, as cinco caixas juntas?

Cinco? Como no Problema XI-26.

Dez? (Dividindo cada caixa em duas).

Ou mais, se fôr possível?

Tente transpor suas conclusões para o problema real do foguete.

XI-28 Duas partículas interagem bidimensionalmente em um referencial inercial.

Antes da interação os momenta das partículas são representados pelos vetores $(\vec{p}_1)_i$ e $(\vec{p}_2)_i$ da figura abaixo (Fig. 1).

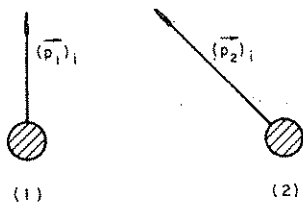
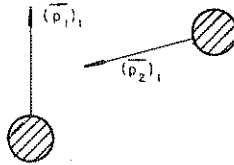



Figura 1

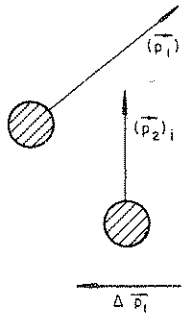
Depois da interação, o momentum da partícula (1) é o vetor $(\vec{p}_1)_f$ representado na Figura 2.

Figura 2

Construa gràficamente o momentum da partícula (2) depois da interação.

XI-29 Numa experiência com a mesa de ar, dois deslizadores movimentam-se com os momenta representados na figura abaixo.

Os deslizadores colidem e durante a interação um sistema prende, e mantem, os dois discos juntos.

Representa gràficamente o momentum do conjunto depois da colisão.

XI-30 Outra experiência com am mesa de ar. Antes de colidirem, os discos têm momenta representados na figura abaixo.

Durante a colisão, o momentum do disco (1) varia de Δp_1, representado também na figura.

Construa o momentum do disco (2) depois da colisão.

CAPÍTULO XII

Centro de massa - Referencial do Centro de Massa

XII-1 De referencial em referencial...

Você se lembra que, no Capítulo precedente, analisamos a interação de um sistema isolado de dois carrinhos, no referencial inercial do Laboratório.

Você se lembra, sim?

O gráfico p vs t da interação era o da Fig. XI-2, que eu vou reproduzir esquemàticamente na Fig. XII-1 a seguir.

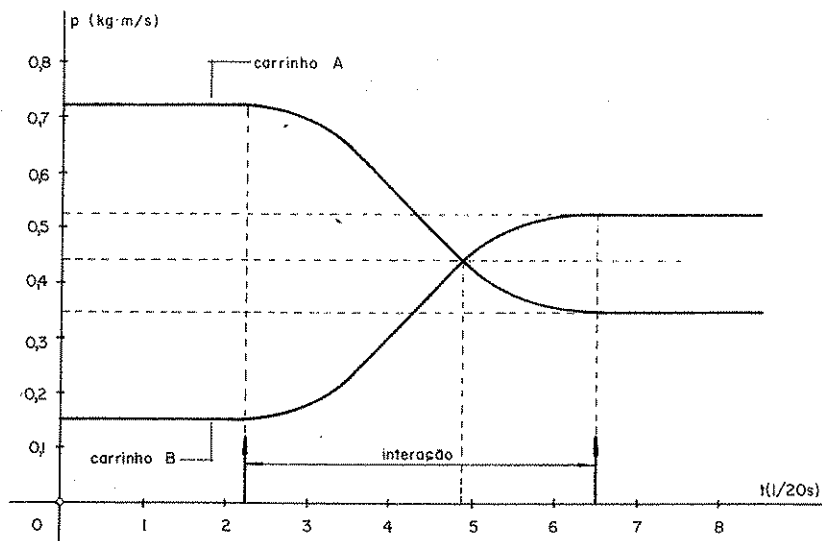



Figura XII-1

O momentum total do sistema conserva-se invariante com o valor de 0,87 kg.m/s.

No referencial do Laboratório.

E mudando de referencial inercial, o que aconteceria?

Suponha por exemplo que você esteja andando paralelamente aos carrinhos, com velocidade constante de, digamos,... 0,50 m/s.

No sentido positivo escolhido na experiência.

Quais são as velocidades dos carrinhos?

Vamos lá! Composição de velocidades!

Com a ajuda do gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ da Fig. XI-1, você achará sem dificuldade:

	antes da interação	depois da interação
carrinho A	+ 0,70 m/s	+ 0,090 m/s
Carrinho B	- 0,12 m/s	+ 0,80 m/s

E para os momenta:

	antes da interação	depois da interação
carrinho A	+ 0,42 kg.m/s	+ 0,054 kg.m/s
carrinho B	- 0,048kg.m/s	+ 0,32 kg.m/s
p total	+ 0,37 kg.m/s	+ 0,37 kg.m/s

Ah! O momentum total antes e depois da interação tem o mesmo valor.

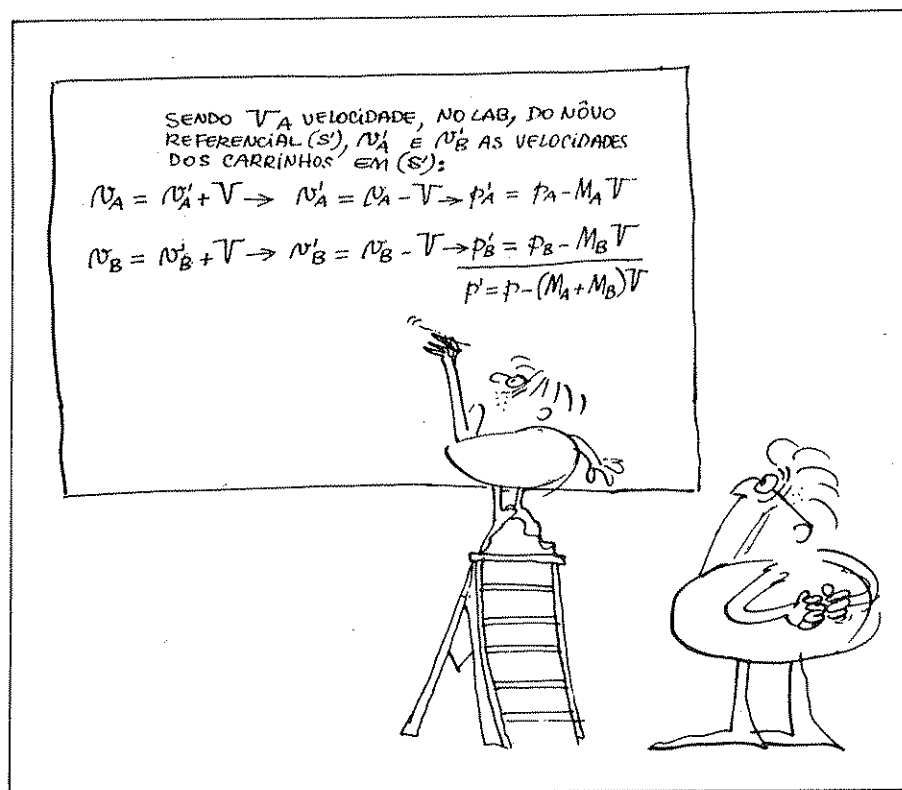
Será que durante a interação...

MARTINS E EU

SENDO V A VELOCIDADE, NO LAB, DO NÔVO REFERENCIAL (S'), v'_A E v'_B AS VELOCIDADES DOS CARRINHOS EM (S'):

$$v_A = v'_A + V \rightarrow v'_A = v_A - V \rightarrow p'_A = p_A - M_A V$$

$$v_B = v'_B + V \rightarrow v'_B = v_B - V \rightarrow p'_B = p_B - M_B V$$

$$p' = p - (M_A + M_B) V$$

DE MODO QUE O MOMENTUM TOTAL EM (S') É IGUAL AO MOMENTUM TOTAL EM (S) MENOS A QUANTIDADE CONSTANTE (M_A+M_B) V...
PORQUE CONSTANTE?

PORQUE, SENDO (S') INERCIAL, V É CONSTANTE!
ÔBA!

PROVAMOS ASSIM QUE SE O MOMENTUM TOTAL DE UM SISTEMA É CONSTANTE EM UM REFERENCIAL INERCIAL ÊLE É CONSTANTE EM QUALQUER OUTRO!
CHEGA! CHEGA!

Tendo conseguido calar o Martins (foi por pouco, desta vez!) vamos ao gráfico p' vs t da interação vista do novo referencial (S').

É, também esquematizado, o da Fig. XII-2.

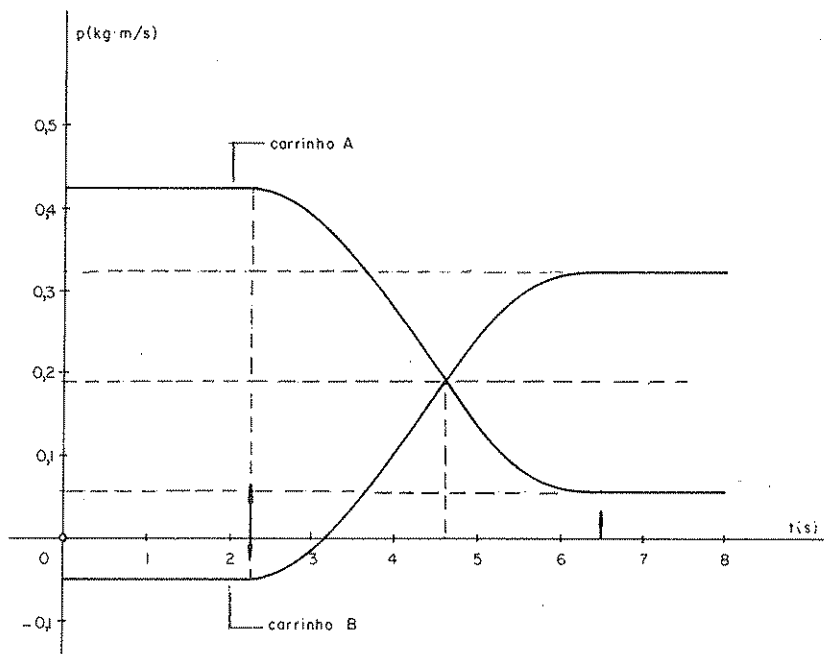



Figura XII-2

Você vê?

Mudando-se de referencial inercial, muda-se o valor do momentum total do sistema.

Êsse novo momentum total é também invariante, claro.

Mas, no fundo, já que o valor do momentum depende do referencial que escolhemos, não deve haver nêle nada de muito especial.

Não é mesmo? Algo que muda de valor ao sabor do referencial inercial escolhido...

Será?

E se a gente procurasse ir ao essencial?

Procuremos o referencial em que o momentum total é nulo.

Isto é, o referencial em que os momenta dos dois carrinhos são sempre diretamente opostos.

XII-2 Qual é o referencial em que o momentum total é nulo?

XII-2-1 A partir do gráfico v vs t.

Voltemos mais uma vez, você e eu, ao gráfico v vs t da interação dos dois carrinhos.

O da Fig. XI-1.

Eu reproduzi a seguir, na Fig. XII-3, os traços essenciais dêsse gráfico.

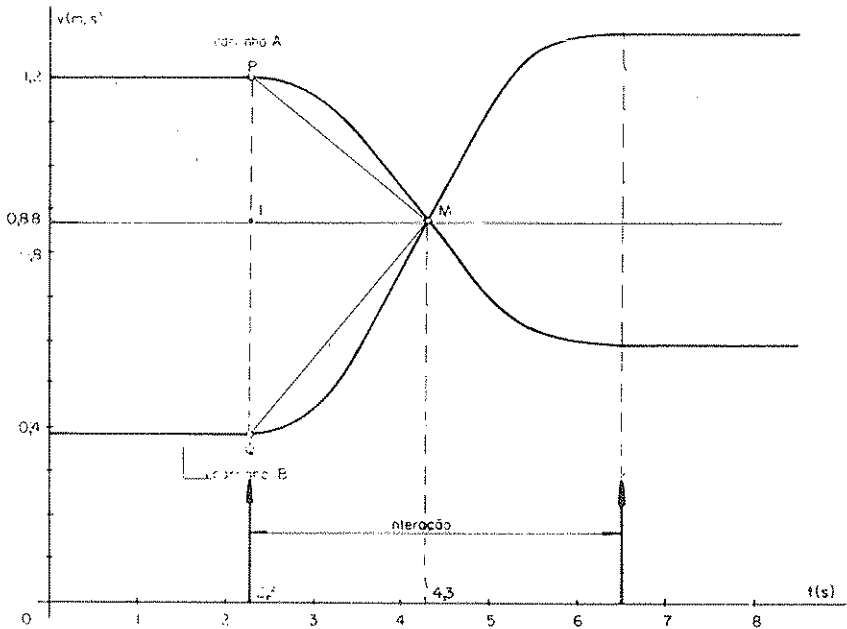



Figura XII-3

Preste atenção ao ponto M, em que se encontram os dois gráficos.

No instante correspondente (4,3s), os carrinhos têm a mesma velocidade. Veremos como e por quê no Capítulo seguinte.

Veja então os dois triângulos MPI e MQI.

No intervalo (2,3s 4,3s) a aceleração média do carrinho A foi:

$$\langle a \rangle_A \propto - \frac{\overline{IP}}{\overline{IM}} \qquad \text{(XII-1)}$$

e a do carrinho B:

$$\langle a \rangle_B \propto \frac{\overline{QI}}{\overline{IM}} \qquad \text{(XII-2)}$$

A razão entre as duas acelerações é

$$\frac{\langle a \rangle_A}{\langle a \rangle_B} = - \frac{\overline{IP}}{\overline{QI}} = \frac{\overline{IP}}{\overline{IQ}} \qquad \text{(XII-3)}$$

Mas aprendemos no Capítulo X que essa razão é também igual a $- \frac{m_B}{m_A}$, não é mesmo?

Ah! então

$$\frac{m_B}{m_A} = - \frac{\overline{IP}}{\overline{IQ}} \qquad \text{(XII-4)}$$

Paremos um instante com essa relação.

Acho que já temos algo interessante aí.

Veja: se eu escolhesse como novo referencial um referencial inercial cuja velocidade no Laboratório fôsse igual à velocidade correspondente ao ponto M (0,88m/s), as novas velocidades seriam representadas por

$\overline{IP}$ para o carrinho A, e por

$\overline{IQ}$ para o carrinho B.

Representando por $\underline{v'_A}$ e $\underline{v'_B}$ essas velocidades, a relação (XII-4) passaria a ser:

$$\frac{m_B}{m_A} = -\frac{v'_A}{v'_B}$$

ou ainda

$$m_A v'_A + m_B v'_B = 0 \qquad \text{(XII-5)}$$

Mas o que é $m_A v'_A$? É o momentum p'_A do carrinho A no novo referencial.

E da mesma forma, $m_B v'_B$ é o momentum p'_B do carrinho B no novo referencial.

De modo que a relação (XII-5) está dizendo que, no novo referencial, o momentum total é nulo!

$$p' = p'_A + p'_B = 0 \qquad \text{(XII-6)}$$

Ah! então existe mesmo um referencial em que o momentum total do sistema é nulo.

XII-2-2 De colarinho e gravata...

Na seção XII-1, o Martins resolveu pràticamente o problema.

Êle mostrou que o momentum total p' no referencial (S') é ligado ao momentum total p no referencial (S) pela relação

$$p' = p - (m_A + m_B)V \qquad \text{(XII-7)}$$

em que o referencial (S') é caracterizado pela velocidade V que êle tem em (S).

Você entende mesmo que a velocidade V é suficiente para caracterizar o referencial (S')?

Muito bem! Se você quiser que em (S') o momentum total seja nulo, você vai se perguntar se existe um valor v* da velocidade V tal que p' seja nulo, não é?

E como a velocidade de (S') em (S) é suficiente para caracterizar (S'), o problema é resolvido.

Basta conhecer v*.

Você então vai substituir, na relação (XII-7), p' por zero e V por v*:

$$0 = p - (m_A + m_B)v^*$$

Isto lhe fornece

$$v^* = \frac{p}{m_A + m_B}$$

Substitua p pela soma $m_A v_A + m_B v_B$:

$$\boxed{v^* = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}} \qquad \text{(XII-8)}$$

Esta é a velocidade que deve ter, em (S), um referencial (S*) para que, nêste referencial (S*), o momentum total do sistema seja nulo.

Isso é muito importante. Vamos devagar.

O referencial (S*) é definido a partir das massas das partículas, e de suas velocidades em um referencial inercial qualquer (S).

Velocidades?... Mas velocidades quando?

Em que instante?

Responda a essa pergunta antes de prosseguir!

Certo! Velocidades em qualquer instante.

Você está de acôrdo? Não importa em que instante da "conversa" entre as duas partículas você mede $\underline{v}_A$ e $\underline{v}_B$.

Pois $\underline{v}_A$ e $\underline{v}_B$ sòmente aparecem na combinação

$$m_A v_A + m_B v_B.$$

E essa soma é invariante.

É o momentum total do sistema em (S).

Outra observação a respeito da expressão de $\underline{v*}$.

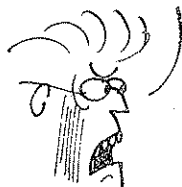
Possìvelmente, você terá acaado essa expressão um pouco complicada, não é?

Mas você vai ver que não é tanto assim não!

MARTINS E EU

MARTINS!!! TOME NOTA DE UM PROBLEMA!
SIM SENHOR! SIM SENHOR!

PARA CALCULAR A MÉDIA FINAL E SABER SE VOCÊ PASSOU DE ANO, VOCÊ PONDERA A FÍSICA...
PONDERA??

APLICA O PÊSO, O COEFICIENTE! VOCÊ PONDERA A NOTA DE FÍSICA POR 3, A NOTA DE MATEMÁTICA POR 3, A DE PORTUGUÊS POR 2, A DE HISTÓRIA POR 2! QUAIS SÃO SUAS NOTAS NESSAS MATERIAS, MARTINS?

HISTÓRIA 6, PORTUGUÊS 7, MATEMÁTICA 8, FÍSICA...
DEZ!

ÔBA! ÔBA!
SHUIPT!

CALCULE SUA MÉDIA!
MÉDIA = $\frac{3 \times 10 + 3 \times 8 + 2 \times 7 + 2 \times 6}{3+3+2+2}$
$= \frac{80}{10} = 8!$

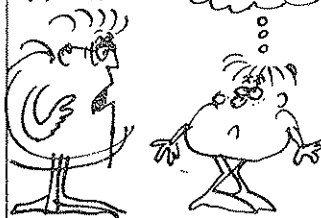
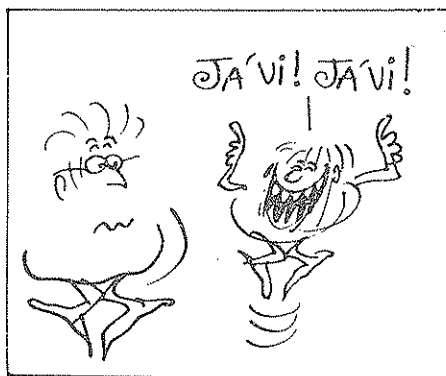
ISSO! VOCÊ MULTIPLICA CADA GRAU PELO COEFICIENTE CORRESPONDENTE, FAZ A SOMA DE TODOS OS PRODUTOS E DIVIDE PELA SOMA DOS COEFICIENTES.

JÁ VI! JÁ VI!

A VELOCIDADE v_* É A MÉDIA PONDERADA DAS VELOCIDADES v_A E v_B. OS PÊSOS SÃO AS MASSAS...
... AS MASSAS...

QUEBROU O DISCO?
NÃO... É QUE COM ÊSSE NEGÓCIO DE PÊSO E MASSA VOU CONFUNDIR O PESSOAL...

PORQUE É QUE VOCÊ NÃO DIZ "COEFICIENTE"?

POIS NÃO...

A VELOCIDADE v_* É A MÉDIA PONDERADA DAS VELOCIDADES v_A E v_B MEDIDAS EM QUALQUER INSTANTE E EM QUALQUER REFERENCIAL INERCIAL...

ÊSSE MARTINS...

AS MASSAS DAS PARTÍCULAS SÃO OS COEFICIENTES DE PONDERAÇÃO!

Você viu? O Martins explicou direitinho.

Lembre-se: $\underline{v^*}$ é simplesmente a média ponderada das velocidades $\underline{v_A}$ e $\underline{v_B}$...

Duas partículas interagem em um referencial inercial, isoladas do resto do Universo.

O momentum total do sistema é invariante.

Se mudarmos de referencial, o valor do momentum total muda.

Mas há um referencial privilegiado.

Há um referencial em que o momentum total do sistema é NULO.

A velocidade dêsse referencial é calculada pela média ponderada das velocidades das partículas em qualquer referencial inercial.

Os coeficientes de ponderação são as massas das partículas.

XII-3 <u>Centro de massa de um sistema de duas partículas que interagem unidimensionalmente</u>.

Êste assunto não tem nada que ver, aparentemente, com o que precede.

Aparentemente.

Paciência! Você descobrirá a ligação na próxima seção.

Veja a Fig. XII-4.

Há duas partículas A e B cujas massas respectivas são m_A e m_B.

No instante qualquer $\underline{t}$ a posição da partícula A é s_A.

E a da partícula B é s_B.

O referencial é <u>qualquer</u> (isto é, não necessàriamente inercial).

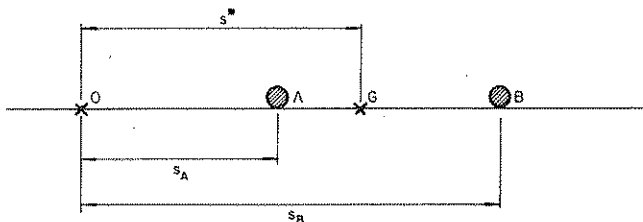



Figura XII-4

Você vai definir geomètricamente um ponto G pela sua posição s* fornecida pela relação

$$s^* = \frac{m_A s_A + m_B s_B}{m_A + m_B} \qquad \text{(XII-9)}$$

E quando eu disse que o presente assunto não tinha aparentemente nenhuma relação com o que precede, estava eu meio errado.

Pois s* é a média ponderada das posições s_A e s_B, da mesma maneira que v* era a média ponderada das velocidades v_A e v_B...

E por sinal, os coeficientes de ponderação são os mesmos: as massas das partículas.

Curioso!

Mas voltando ao ponto G definido pela relação (XII-9), tentemos caracterizá-lo mais... concretamente.

Em primeiro lugar, observe que G está sempre entre as duas partículas.

Você não entende por quê?

Ora, a média ponderada das suas notas não pode ser menor que a menor delas, nem maior que a maior, não é mesmo?...

Quaisquer que sejam os "pêsos".

Pois então, a média ponderada de s_A e s_B não pode ser menor que ame

nor dessas duas posições, nem maior que a maior.

O que prova que, efetivamente, G está entre as duas partículas. Sempre.

Tentemos melhorar ainda um pouco.

Você vai ver que a localização de G entre A e B é muito fácil. O negócio é calcular

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} .$$

Você não esqueceu que $\overline{GA}$ representa a medida algébrica do segmento GA:

$$\overline{GA} = s_A - s^*$$

E da mesma forma

$$\overline{GB} = s_B - s^*$$

De modo que

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = \frac{s_A - s^*}{s_B - s^*} \qquad \text{(XII-10)}$$

É só substituir $\underline{s^*}$ pelo seu valor, fornecido pela definição (XII-9)...

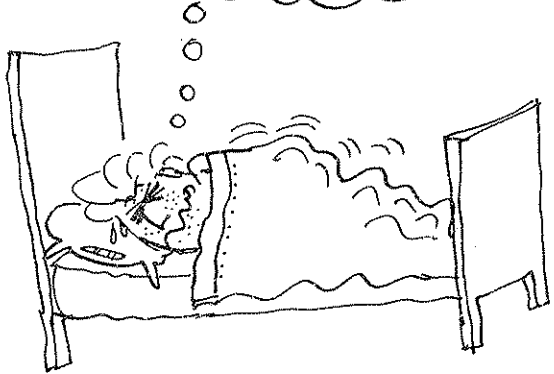
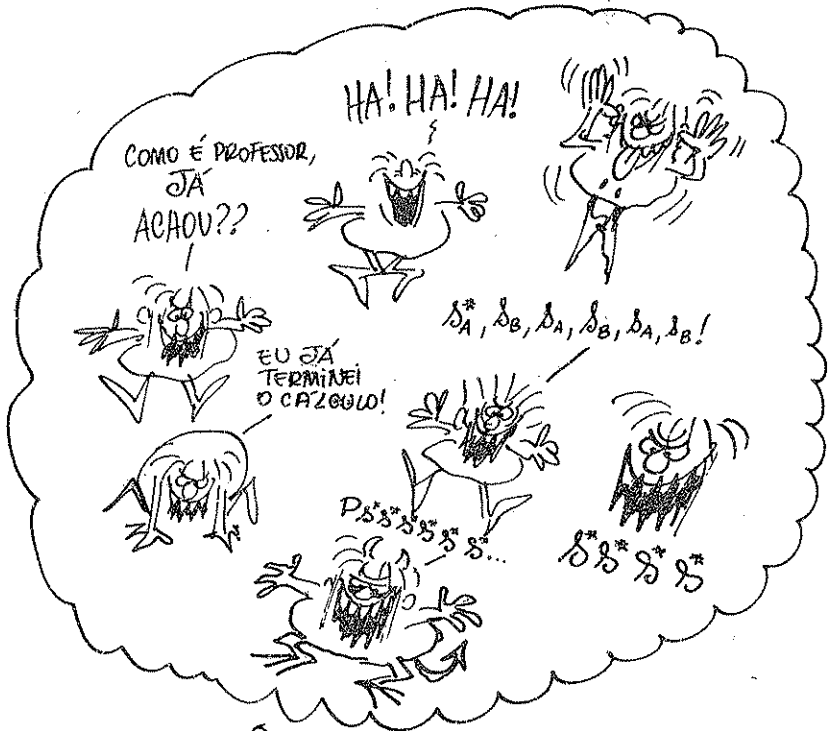
Mas tanto cálculo pela frente já está me dando preguiça.

Está mesmo!

Deve haver um outro meio!

Que tal deixar o Martins fazer os cálculos...

...e amanhã, depois de uma bôa noite de sono, voltarmos ao assunto?

HA! HA! HA!
COMO É PROFESSOR, JÁ ACHOU??
$s_A^*, s_B, s_A, s_B, s_A, s_B$!
EU JÁ TERMINEI O CÁLCULO!
$Ps^*s^*s^*s^*s^*s^*$...
$s^*s^*s^*s^*$

...Muito bem moçada. Depois de uma b̲ô̲a̲ noite de sono, voltemos à determinação do ponto G.

Veja a Fig. XII-5. Sôbre a perpendicular em A a OA, eu construí um segmento AC cujo comprimento é proporcional a m_A.

O produto $\underline{m_A s_A}$ é proporcional à área do retângulo OACD.

De modo análogo, sôbre a perpendicular em B a OB, mas em sentido contrário, eu construí um segmento BE cujo comprimento é proporcional a m_B.

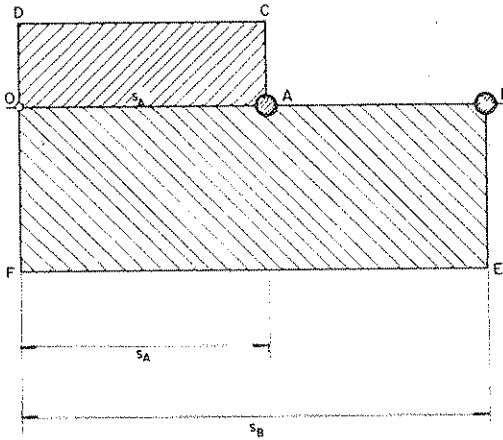



Figura XII-5

O produto $\underline{m_B s_B}$ é proporcional à área do retângulo OBEF.

Nessas condições, a soma $(m_A s_A + m_B s_B)$ é proporcional à área total sombreada da figura.

Ora, se eu quiser achar o ponto G tal que, segundo a relação (XII-9), $(m_A + m_B)s^* = m_A s_A + m_B s_B$, eu devo construir o retângulo FIHD (Figura XII-6) cuja área seja igual àquela área sombreada total da Fig. XII-5.

Figura XII-6

Mas isso obriga as duas áreas pontilhadas I e II a serem iguais, não é? Eu acrescento (I) e tiro (II). Se eu quiser que a área permaneça a mesma...

Então (AC)x(GA) = (BE)x(GB).

Mas AC e BE são proporcionais a m_A e m_B.

Você conclui que

$$m_A(GA) = m_B(GB)$$

ou ainda que

$$\frac{GA}{GB} = \frac{m_B}{m_A} . \qquad \text{(XII-11)}$$

Veja que interessante resultado.

O ponto G definido pela relação (XII-9) é o ponto que divide <u>internamente</u> o segmento AB na razão <u>inversa</u> da razão das massas.

Se você quiser expressar isto algébricamente, basta observar que os segmentos orientados $\overline{GA}$ e $\overline{GB}$ têm sempre sinais contrários. A relação (XII-11) passará a escrever-se:

$$\boxed{\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = -\frac{m_B}{m_A}} \qquad \text{(XII-12)}$$

E a propósito. Quanto é que Martins e o resto de vocês acharam?

Mas estava dizendo que êsse resultado é interessante: a razão é que o ponto G assim definido não depende do referencial nem da origem escolhidos.

O ponto G é geomètricamente invariante.

Você entende por quê? Porque a sua posição depende sòmente da posição <u>relativa</u> das duas partículas, e das suas massas.

Ou melhor, da razão entre suas massas.

Isso é confortador.

Pois se G não fôsse geomètricamente invariante, isto é, se sua posição dependesse do referencial que você escolhe para construí-lo, ou da origem que você escolhe nêsse referencial, êle não teria realmente nenhum interêsse físico.

Nessas condições, a soma $(m_A s_A + m_B s_B)$ é proporcional à área total sombreada da figura.

Ora, se eu quiser achar o ponto G tal que, segundo a relação (XII-9), $(m_A + m_B)s^* = m_A s_A + m_B s_B$, eu devo construir o retângulo FIHD (Figura XII-6) cuja área seja igual àquela área sombreada total da Fig. XII-5.

Figura XII-6

Mas isso obriga as duas áreas pontilhadas I e II a serem iguais, não é? Eu acrescento (I) e tiro (II). Se eu quiser que a área permaneça a mesma...

Então (AC)x(GA) = (BE)x(GB).

Mas AC e BE são proporcionais a m_A e m_B.

Você conclui que

$$m_A(GA) = m_B(GB)$$

ou ainda que

$$\frac{GA}{GB} = \frac{m_B}{m_A} \quad . \qquad \text{(XII-11)}$$

Veja que interessante resultado.

O ponto G definido pela relação (XII-9) é o ponto que divide <u>internamente</u> o segmento AB na razão <u>inversa</u> da razão das massas.

Se você quiser expressar isto algébricamente, basta observar que os segmentos orientados $\overline{GA}$ e $\overline{GB}$ têm sempre sinais contrários. A relação (XII-11) passará a escrever-se:

$$\boxed{\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = -\frac{m_B}{m_A}} \qquad \text{(XII-12)}$$

E a propósito. Quanto é que Martins e o resto de vocês acharam?

Mas estava dizendo que êsse resultado é interessante: a razão é que o ponto G assim definido não depende do referencial nem da origem escolhidos.

O ponto G é geomètricamente invariante.

Você entende por quê? Porque a sua posição depende sòmente da posição <u>relativa</u> das duas partículas, e das suas massas.

Ou melhor, da razão entre suas massas.

Isso é confortador.

Pois se G não fôsse geomètricamente invariante, isto é, se sua posição dependesse do referencial que você escolhe para construí-lo, ou da origem que você escolhe nêsse referencial, êle não teria realmente nenhum interêsse físico.

E ninguém perderia tempo com êle.

O ponto G definido pelas relações (XII-9) ou (XII-12) é chamado CENTRO DE MASSA do par de partículas A e B.

Exemplo. Veja como é simples achar o centro de massa de um par de partículas: na Fig. XII-7 a partícula A tem massa 0,10kg e a partícula B tem massa 0,20kg.

Em outros têrmos, as massas das partículas estão na razão $\frac{2}{1}$.

Figura XII-7

Divida então o segmento AB em três (2 + 1) partes iguais.

O ponto G dista da partícula B de uma dessas três partes.

Você com certeza já tinha concluído que o centro de massa fica sempre mais perto da partícula de maior massa, não é?

A Fig. XII-8 mostra o centro de massa de duas partículas cujas massas estão na razão $\frac{4}{3}$.

Você divide o segmento AB em sete (4 + 3) partes iguais. O centro de massa dista três dessas sete partes, a partir da partícula de maior massa.

E finalmente, deixe-me lhe mostrar a maneira puramente geométrica de construir o centro de massa.

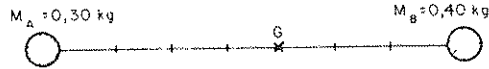



Figura XII-8

Na Fig. XII-9 a razão $\frac{m_A}{m_B}$ é igual a $\frac{3}{2}$.

Trace duas paralelas Δ_A e Δ_B em sentidos contrários, a partir de A e B.

Sôbre Δ_A leve dois segmentos consecutivos iguais.

Sôbre Δ_B leve três segmentos consecutivos iguais entre si e também aos outros. Você obtem assim os pontos C e D.

O segmento CD encontra o segmento AB em G.

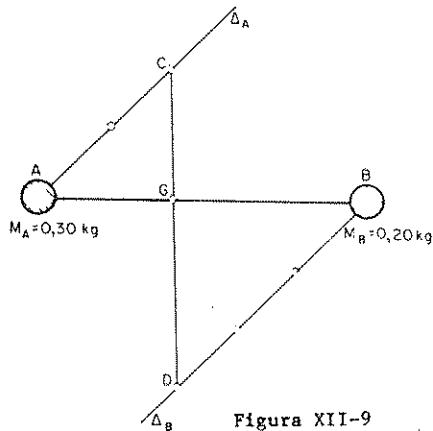



Figura XII-9

XII-4 Propriedades estáticas do Centro de massa. Centro de gravidade.

O Martins fêz o outro dia algumas experiências de importância fundamental.

Mas são representadas na Figura XII-10.

Mas como elas são extremamente simples de realizar, eu lhe recomendo de repetí-las em casa.

Prometido?

Dei ao Martins massa de modelar, um lápis, e um elástico.

Êle dividiu primeiro a massa de modelar em duas porções iguais, fêz duas bolas e espetou nelas as duas extremidades do lápis.

Amarrou o elástico no meio do lápis e segurou a outra extremidade: o conjunto bolas-lápis ficou em equilíbrio na horizontal, como mostra a Fig. XII-10-a.

Nada de mais. Pela simetria do sistema era evidente que ía ficar em equilíbrio nessa posição.

A seguir, o Martins dividiu a massa de vidraceiro em três partes iguais.

Juntou duas e fêz uma bola.

Com a terceira fêz uma bola menor.

Espetou no lápis.

Fixou o elástico a um têrço do comprimento a partir da bola maior.

E o conjunto ficou de novo em equilíbrio na horizontal. Como na Fig.XII-10-b.

Finalmente, o Martins dividiu a

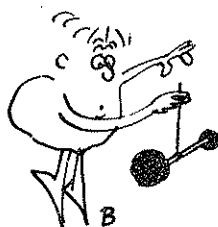
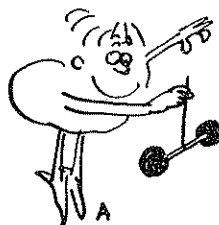



Figura XII-10

massa de vidraceiro em quatro partes iguais.

Juntou três e fêz uma bola.

Com a quarta fêz uma bola menor.

Por favor continue, sim?

E tem mais.

Em cada uma das experiências, o elástico estava alongado do mesmo comprimento.

E como o Martins é curioso, êle quis tirar isso a limpo: juntou tôda a massa em uma bola só, e suspendeu o elástico, como na Fig. XII-11.

Figura XII-11

O elástico alongou-se ainda do mesmo comprimento.

Qual é a interpretação das experiências do Martins?

Observe que em cada uma dos três casos representados na Fig.XII-10, o conjunto das duas bolas está suspenso pelo centro de massa.

Ora, desprezando-se o pêso do lápis...

E você acha que o pêso do lápis pode ser desprezado?

Discuta isso com o seu Professor!

...as fôrças que atuam sôbre o sistema são o pêso $\frac{1}{3} m\vec{g}$ da bola menor e o pêso $\frac{2}{3} m\vec{g}$ da bola maior - no caso (b) da Fig. XII-10 -, e a tração $\vec{T}$ exercida pelo elástico no centro de massa G.

Essas fôrças estão representadas na Fig. XII-12.

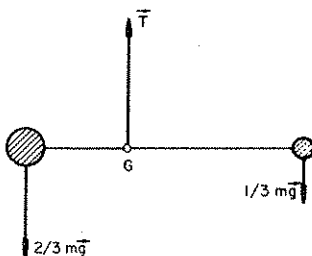



Figura XII-12

Ora, se o sistema está em equilíbrio a fôrça resultante é nula, não é mesmo? Escrevo então

$$\vec{T} + \frac{2}{3}\, m\vec{g} + \frac{1}{3}\, m\vec{g} = 0$$

ou seja

$$\vec{T} = -m\vec{g}$$

Acabo de escrever que, em módulo, a tração do elástico é igual ao pêso total da massa de vidraceiro.

Mas você já não esperava isto?

Está assim explicado que o elástico esteja alongado do mesmo comprimento nas três experiências: a massa que êle sustenta é sempre a mesma.

É também a mesma na experiência da Fig. XII-11, e o elástico continua alongado do mesmo comprimento.

Mas espere aí: dizer que o elástico está alongado na mesma quantidade na experiência da Fig. XII-10-b por um lado, e na da Fig. XII-11 por outro lado, é dizer que êle não pode fazer diferença nenhuma entre as duas situações.

Ou ainda: as duas fôrças $\frac{1}{2}\vec{mg}$ e $\frac{2}{3}\vec{mg}$ aplicadas nas extremidades do lápis, são equivalentes à fôrça

$$\frac{2}{3}\vec{mg} + \frac{1}{3}\vec{mg} = \vec{mg}$$

aplicada em G.

A Fig. XII-13 resume isto.

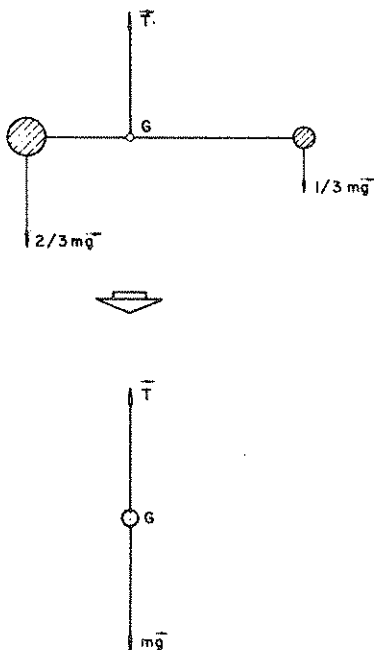



Figura XII-13

O ponto G é pois o ponto de aplicação da resultante das fôrças de gravidade que atuam sôbre as duas bolas.

E por essa razão, G é chamado <u>centro de gravidade do sistema</u>.

O centro de gravidade do sistema das duas bolas coincide com o centro de massa (*).

XII-5 <u>Movimento do centro de massa</u>.

Você não perderá de vista, nesta seção, que o sistema de partículas que estudamos está isolado das ações externas (real - ou artificialmente).

Isto é muito importante.

Você tampouco esquecerá que o referencial no qual estudamos a interação das duas partículas é um referencial inercial: o Laboratório ou qualquer outro equivalente.

Isto é também muito importante!

XII-5-1 <u>Velocidade do centro de massa</u>.

Comecemos por "esquentar" um pouco no assunto.

Acho que a Fig. XII-6 vai servir-nos de nôvo. Você se lembra dela? Não? Então vou repetí-la na Fig. XII-14.

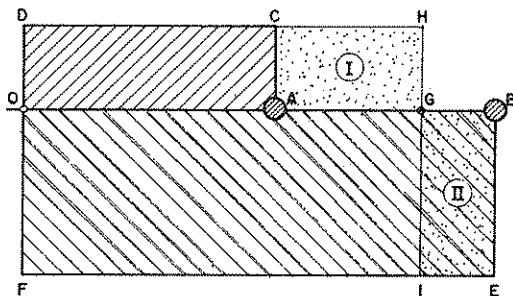



Figura XII-14

(*) A rigor, deveria acrescentar: enquanto os pêsos são proporcionais às massas. No Capítulo XVI voltaremos sôbre o assunto.

Ela mostra que a área do retângulo FIHD é igual à soma das áreas dos retângulos OACD e OBEF, pela igualdade das áreas pontilhadas (I) e (II).

E não esqueçamos que o lado HI passa pelo centro de massa G.

Muito bem! Movimentemos o sistema.

A partícula A tem velocidade v_A. A partícula B tem velocidade v_B.

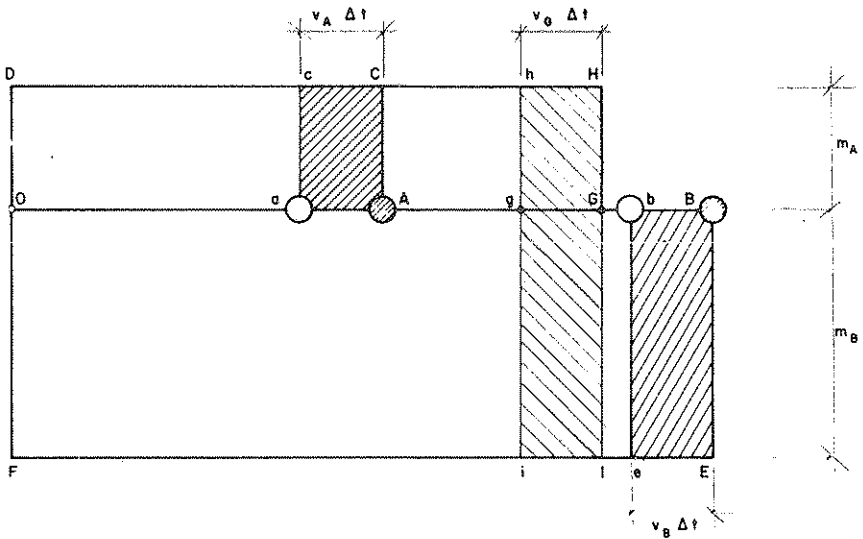



Figura XII-15

Deixemos andar tudo durante um intervalo muito pequeno Δt.

Observe que eu não estou impedindo as partículas de conversar entre elas.

Se não conversam, Δt pode ser qualquer.

Se estão interagindo, Δt deve mesmo ser muito pequeno.

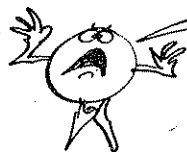
Lê os parágrafos seguintes e me diga por quê.

A Fig. XII-15 mostra a situação no final dêsse intervalo.

A partícula A andou de $v_A \Delta t$, representado pelo segmento Cc.

A partícula B andou de $v_B \Delta t$, representado pelo segmento Ee.

E sendo v_G a velocidade do centro de massa durante êsse mesmo intervalo, o dito centro de massa andou de $v_G \Delta t$, representado pelo segmento Hh.

Mas a condição geométrica para que G continue sendo o centro de massa é...

PARE! e complete você mesmo...

Como? Ah! você não estava prestando atenção heim?

E VOCÊ ACHA QUE EU VOU ATURAR ISSO MUITO TEMPO?

Volte a ler desde o início da Seção.

E complete!..

Ainda bem!

A condição geométrica para que G continue sendo o centro de massa é que a área do retângulo FihD seja igual à soma das áreas dos retângulos OacD e ObeF.

Isso impõe que a área do retângulo hHIi seja igual à soma das áreas

dos retângulos aACc e bBEe. Não é mesmo?

Ou (com a Fig. XII-15 sempre debaixo dos ôlhos):

$$(m_A + m_B)v_G\Delta t = m_A v_A \Delta t + m_B v_B \Delta t$$

Mas essa relação fornece v_G!

$$v_G = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} \qquad \text{(XII-13)}$$

Minha Nossa Senhora!
Eu já vi isto em algum lugar...
Você não poderia dar-me uma ajuda, não?

Ah! mas temos aqui um resultado da maior importância!

A velocidade $\underline{v_G}$ do centro de massa é efetivamente igual à velocidade $\underline{v^*}$ que determinamos na Seção XII-2-2 quando procurávamos um referencial em que o momentum total do sistema fôsse nulo.

Conclusão: o centro de massa G é um ponto que pertence ao referen-

cial (S*) definido naquela oportunidade.

E por essa razão (S*) é chamado <u>referencial do centro de massa</u>, abreviado RCM.

No RCM, o momentum total do sistema é sempre nulo.

É sòmente no Capítulo XIV, ao falarmos de energia e transferência de energia, que você poderá apreciar o interêsse do momentum total ser nulo no RCM.

Você terá então a oportunidade de ver que o RCM é o referencial mais "econômico", do ponto de vista da energia.

XII-5-2 <u>Momentum total do sistema</u>.

Sendo $p = m_A v_A + m_B v_B$ você conclui da relação (XII-13), em que substituímos $\underline{v_G}$ por $\underline{v^*}$, que

$$\boxed{p = (m_A + m_B)v^*} \qquad \text{(XII-14)}$$

O que significa isto, fìsicamente?

Figura XII-16

Eu contratei o fantasminho PSIU para acompanhar sempre o centro de massa nessa história que estou lhe contando.

A Fig. XII-16 introduz formalmente Psiu.

Muito bem. Se Psiu tivesse uma massa igual à soma das massas das

das duas partículas, o seu momentum seria $(m_A + m_B)v^*$.

Seria igual ao momentum total do sistema.

O momentum total do sistema é igual ao momentum do fantasma!

XII-5-3 Aceleração do centro de massa.

A velocidade do centro de massa, no referencial inercial escolhido para o estudo da interação, é

$$v^* = \frac{p}{m_A + m_B} \qquad \text{(XII-15)}$$

Isso é simplesmente outra maneira de escrever a relação (XII-14).

p representa o momentum total do sistema, e sabemos que êsse momentum total permanece invariante enquanto o sistema permanece isolado das ações externas.

Mas então v^* é êle mesmo invariante!

Você conclui que, em qualquer referencial inercial, o centro de massa de um sistema isolado tem velocidade constante.

O que significa que a aceleração do centro de massa é nula.

Ou ainda, que o centro de massa ignora a interação das duas partículas.

O nosso amigo Psiu não está interessado na conversa das duas partículas e continua tranquilamente o seu caminho, impertubável.

XII-5-4 Verificação experimental.

As cogitações teóricas são muito bonitas, mas gostaríamos talvez de verificar experimentalmente essas previsões, não acha?

Então vamos juntos al Laboratório. Venha comigo!

Aí estão os dois carrinhos A e B que estamos utilizando desde o Capítulo X.

A maneira segura de obrigar os carrinhos a conversarem é amarra-los a uma mola, como tinhamos feito na Seção X-3-2 do Capítulo X, ao falar -

mos de massa inercial (Fig. XII-17).

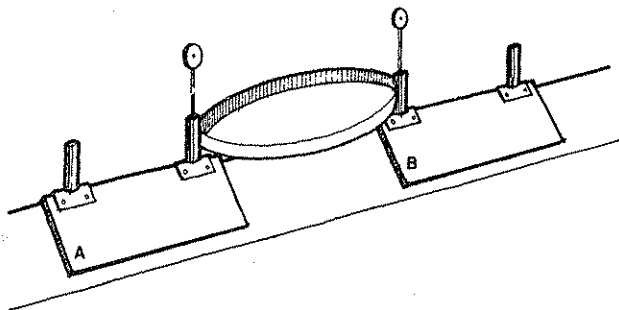



Figura XII-17

Lá vão êles, "isolados" sôbre a calha de ar.

Andando e oscilando, feito minhoca.

A máquina giratória, muito interessada, está observando o movimen - to.

E a fotografia da Fig. XII-18 mostra o que ela viu.

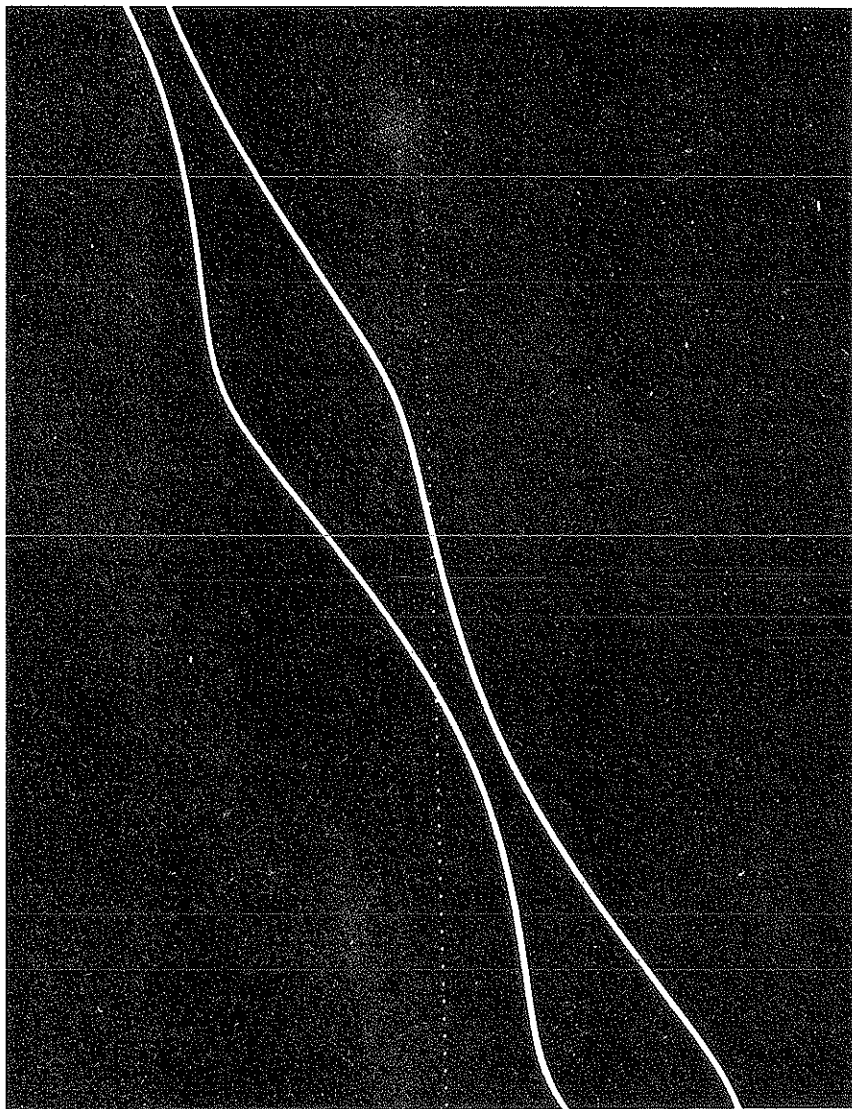



Figura XII-18

Observe cuidadosamente a fotografia precedente.

É um gráfico s vs t da interação.

O carrinho A tem massa de 600g, e o carrinho B, de 400g.

Se eu entendi bem o que eu mesmo acabo de explicar, o movimento do centro de massa deve ser uniforme.

E consequentemente, o gráfico s vs t do CM deve ser uma reta.

O que é que você tem que fazer para comprovar isto?

Achou?

Veja: a figura XII-19 lhe dá a solução.

Escôlha um instante qualquer. A posição do carrinho A é s_A.

A do carrinho B é s_B.

A distância entre os dois carrinhos é representada pelo segmento AB.

A imagem G do centro de massa deve dividir êsse segmento na razão inversa da razão das massas.

Mas quais eram mesmo as massas?

$$m_A = 600g; \quad m_B = 400g$$

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{3}{2} .$$

Divida AB em cinco segmentos iguais, e terá G na extremidade do segundo dêsses segmentos a partir de A.

É só repetir para outros instantes sucessivos.

Eu fiz essas construções numa outra fotografia idêntica à da Figura XII-18.

E o resultado está na Fig. XII-20.

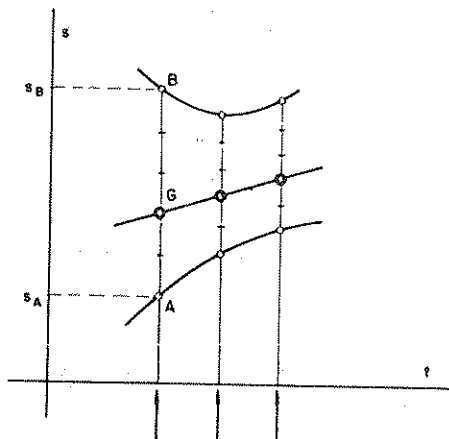



Figura XII-19

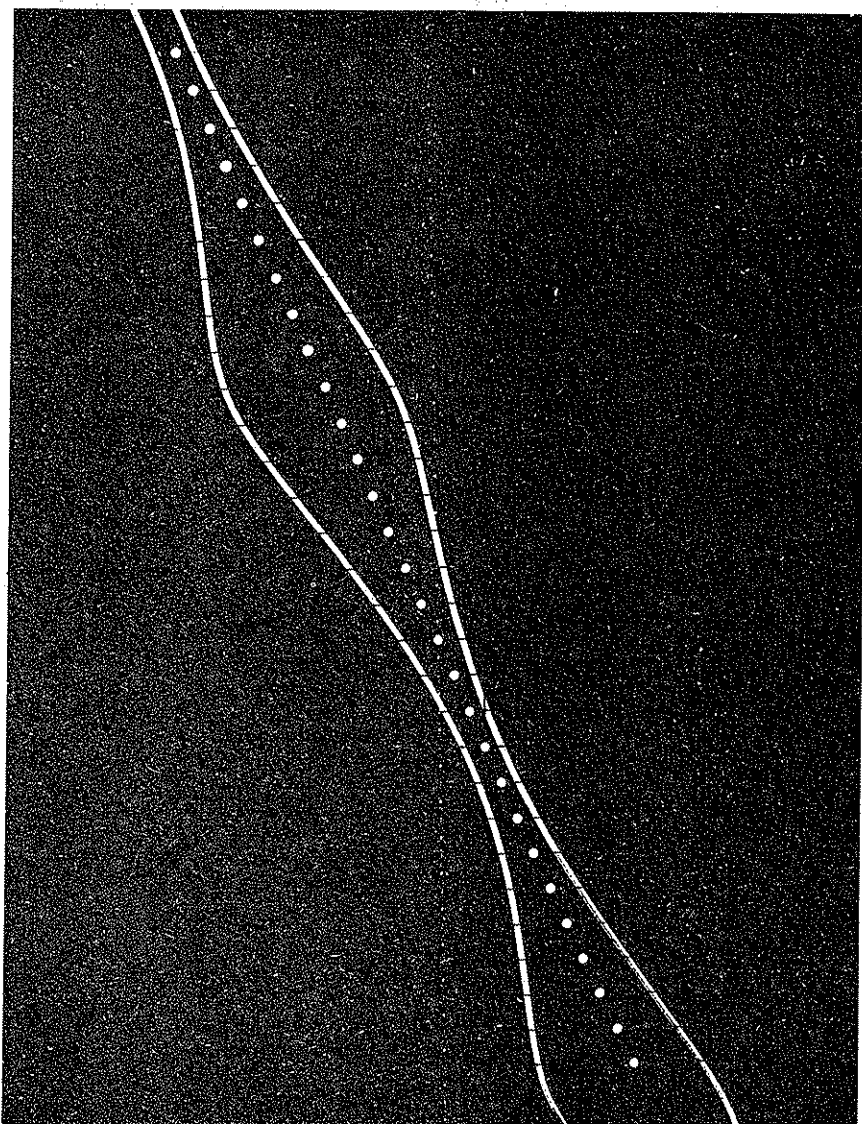



Figura XII-20

O que é que você observa?

O gráfico s vs t do centro de massa G é uma reta.

O movimento do centro de massa é retilíneo uniforme.

De acôrdo com o que estava previsto, não é mesmo?

O sistema dos dois carrinhos pode ser considerado como isolado: as fôrças externas têm uma soma nula...

...e consequentemente o fantasminho Psiu, que ignora a interação, tem velocidade constante no referencial inercial do Laboratório.

Mas então nosso amigo Psiu segue a risco a Primeira Lei de Newton...

XII-6 Interações bidimensionais.

Vejamos rapidamente, sem insistir muito nêste primeiro Curso, o que acontece ao centro de massa numa interação bidimensional.

O sistema de partículas continua isolado.

O referencial é sempre o referencial inercial do Laboratório.

XII-6-1 Posição do centro de massa.

A definição da posição é uma extensão bidimensional da definição (XII-9).

Se $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ são os vetores de posição das partículas A e B em determinado instante (Fig. XII-21), o vetor $\vec{r}^*$ do centro de massa G é definido por

$$r^* = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B} \qquad \text{(XII-16)}$$

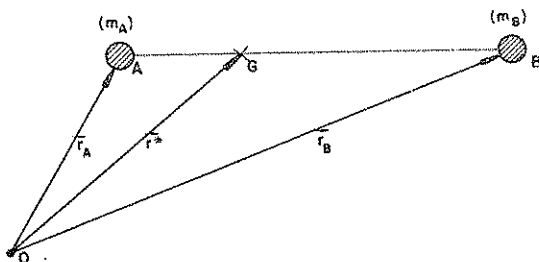



Figura XII-21

O vetor de posição do centro de massa é ainda a média ponderada dos vetores de posição das partículas. Os coeficientes são as massas das partículas.

Você demonstrará no Problema XII-11 que o ponto G assim definido divide internamente o segmento AB na razão inversa da razão das massas das partículas.

É obviamente necessário, se quisermos que nossas definições sejam coerentes.

XII-6-2 <u>Velocidade do centro de massa</u>.

No intervalo de tempo Δt, suficientemente pequeno para que nossos resultados permaneçam na faixa de incerteza permitida...

...a posição da partícula <u>A</u> varia de $\Delta\vec{r}_A$, a da partícula <u>B</u> de $\Delta\vec{r}_B$, e a do centro de massa de $\Delta\vec{r}^*$.

E, por causa de (XII-16), temos

$$r^* = \frac{m_A\Delta\vec{r}_A + m_B\Delta\vec{r}_B}{m_A + m_B} .$$

Dividamos tudo por Δt:

$$\frac{\Delta r^*}{\Delta t} = \frac{m_A \frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t} + m_B \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t}}{m_A + m_B} \qquad \text{(XII-17)}$$

$\frac{\Delta \vec{r}^*}{\Delta t}$ é a velocidade $\vec{v}^*$ do centro de massa.

$\frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t}$ é a velocidade $\vec{v}_A$ da partícula A.

$\frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t}$ é a velocidade $\vec{v}_B$ da partícula B.

A relação (XII-17) passa a escrever-se:

$$v^* = \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} \quad . \qquad \text{(XII-18)}$$

Observe que a soma $m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$ é o momentum total $\vec{p}$ do sistema das duas partículas.

E êsse momentum é <u>invariante</u> desde que o sistema esteja isolado.

Em conseqüência, como no caso das interações bidimensionais:

- a velocidade do centro de massa é constante.
- sua aceleração é nula.

...E O FANTASMINHO PSIU CONTINUA IGOORANDO A INTERAÇÃO DAS PARTÍCULAS.

XII-6-3 <u>Verificação experimental</u>.

A Fig. XII-22 reproduz a fotografia estroboscópica da interação bidimensional de dois discos, na mesa de ar.

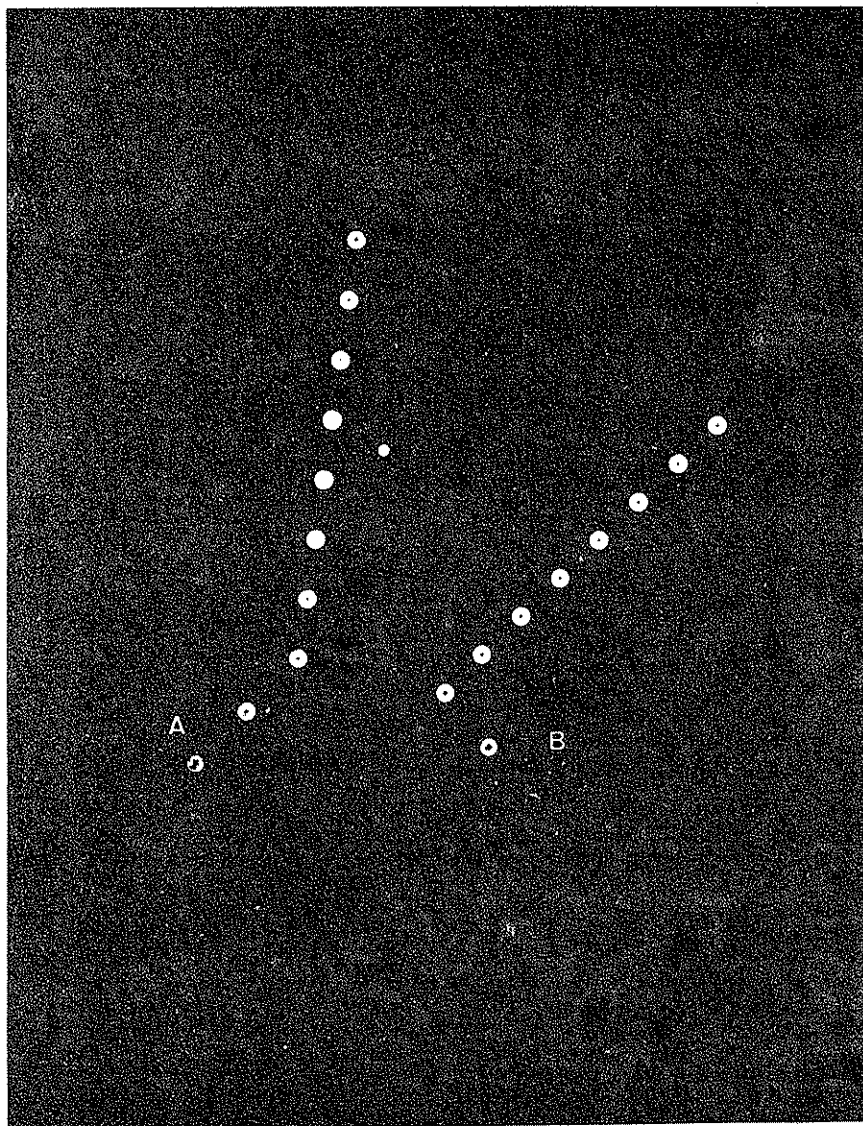



Figura XII-22

Embora a interação em si seja rápida demais para ser registrada, podemos verificar se a trajetória do centro de massa <u>depois</u> da interação é ou não a mesma reta que <u>antes</u>.

Pois se o fantasminho ignora a interação, é isto que deve acontecer, não é mesmo?

A massa dos discos era respectivamente $m_A = 600g$, $m_B = 300g$.

Você talvez se lembra que essa interacão já foi utilizada na Seção XI-4-2 do Capítulo XI.

O que foi mesmo que verificamos, naquela oportunidade?

O que é que vamos fazer para achar a trajetória do centro de massa? Heim?

Pois é... então faça <u>você mesmo</u> a construção sôbre uma fôlha de papel transparente! E conclua...

XII-7 <u>A interação vista no RCM</u>.

O que é que o centro de massa vê no decorrer de uma interação?

Seria melhor perguntar, aliás: como é que uma interação aparece no RCM?

A resposta é fácil. Veja: no RCM o momentum total é sempre nulo (*).

De modo que os momenta vetoriais são sempre como na Fig. XII-23: vetores paralelos, de sentidos contrários, mas com o mesmo módulo.

É sòmente assim que a soma $\vec{P}_A + \vec{P}_B$ será nula.

Se a interação fôr unidimensional, os momenta são diretamente opos-

(*) Eu não especifico se o RCM é inercial. Se o sistema de partículas fôr isolado, Psiu está em movimento retilíneo uniforme no Laboratório: o RCM é inercial. Se o sistema não fôr isolado, o RCM não é geralmente inercial. Mas mesmo assim o momentum total no RCM é ZERO! Faça o Problema XII-13.

tos, como na Fig. XII-24: o fantasminho Psiu vê as partículas aproximar-se dêle com momenta iguais e opostos, e a seguir afastar-se dêle, sempre com momenta iguais e opostos.

Ou inversamente.

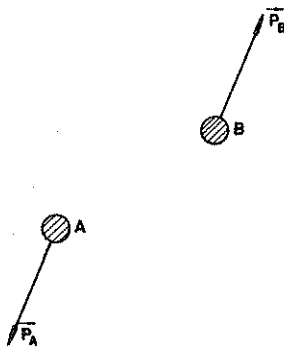



Figura XII-23

Figura XII-24

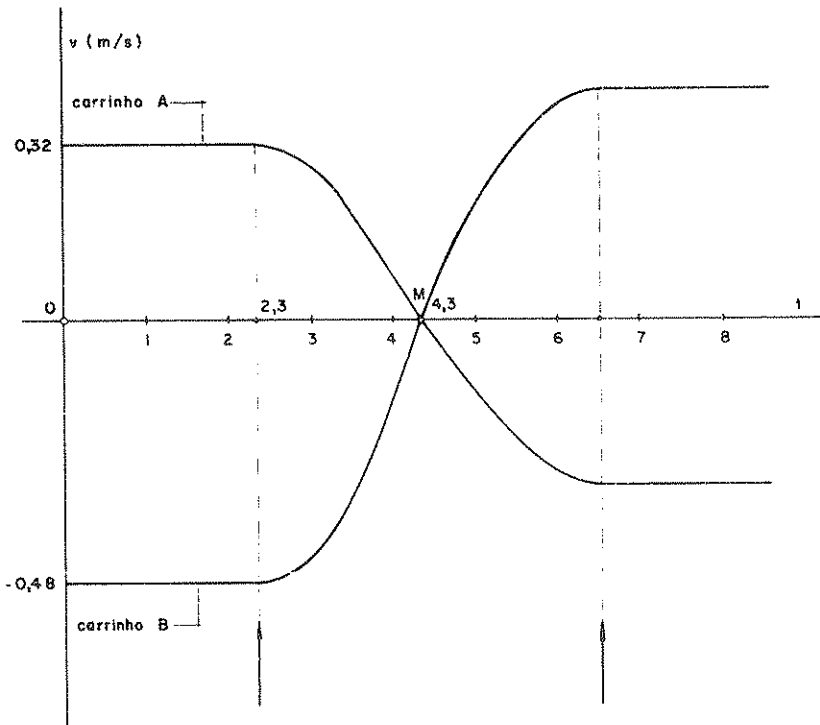



Figura XII-25

A Fig. XII-25 reproduz os gráficos velocidade-tempo da interação dos dois carrinhos.

São os mesmos gráficos que os da Fig. XII-3.

Mas agora o eixo dos tempos passa pelo ponto M, interseção das duas curvas.

Provamos na seção XII-2-1 que essa mudança do eixo dos tempos transporta a interação no RCM.

Interprete: antes da interação, Psiu está vendo o carrinho A aproximar-se dêle com velocidade de 0,32m/s, e o carrinho B aproximar-se dêle em sentido contrário com velocidade de 0,48m/s.

A interação começa em t = 2,3s.

As velocidades dos dois carrinhos diminuem, em módulo.

Diminuem...

Anulam-se em t = 4,3s.

Você entende a necessidade de ambas as velocidades anularem-se no mesmo instante, no RCM?

Vamos!

Fìsicamente, o que é que está acontecendo nêsse instante?

Como são as velocidades no RCM?

Como é a distância entre os dois carrinhos?

A partir de t = 4,3s os dois carrinhos afastam-se de Psiu em sentidos contrários...

Afastando-se um do outro...

Você mostrará fàcilmente que, em qualquer instante, as velocidades V_A e V_B dos carrinhos no RCM estão entre si na razão inversa da razão das massas:

$$\frac{V_A}{V_B} = -\frac{m_B}{m_A} \qquad \text{(XII-17)}$$

Como? Ainda não demonstrou isso?

Francamente!

Ah! ainda bem!...

Você se lembrou da propriedade fundamental do RCM...

E qual é mesmo essa propriedade?

Eu deixo para você construir, no Probl. XII-14 os gráficos momentum-tempo da interação no RCM.

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas estrelados (*) devem ser discutidos em aula, com o seu Professor).

XII-1 Um sistema isolado de duas partículas interage unidimensionalmente no Laboratório. As massas são respectivamente $m_1 = 100g$ e $m_2 = 200g$.

Em determinado instante as velocidades das partículas são $v_1 = 2{,}40$ m/s e $v_2 = 1{,}50$m/s.

a) Qual é o momentum total do sistema no Laboratório.

b) Qual é a velocidade de translação, no Laboratório, do referencial inercial no qual o momentum total do sistema é nulo?

XII-2 Duas partículas em interação unidimensional têm em determinado instante, no Laboratório, velocidades respectivamente iguais a $v_1 = 40$m/s e $v_2 = 90$m/s.

A velocidade do referencial inercial no qual o momentum total do sistema é nulo é 70cm/s.

Supondo-se o sistema isolado, qual é a razão entre as massas das partículas?

Sugestão: Não faça toneladas de cálculos! Esboce um gráfico <u>v</u> vs <u>t</u> da interação.

XII-3 Nos exercícios seguintes, é dada a distância AB entre duas partículas, e as massas m_A e m_B.

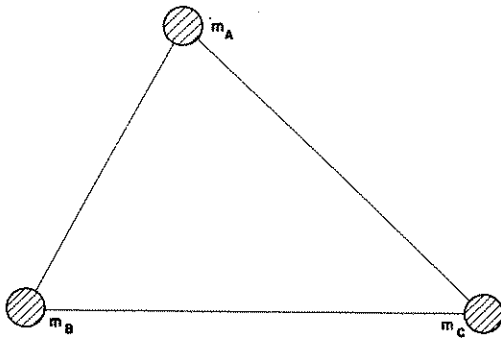
Em cada caso, determine a posição do centro de massa.

a) AB = 40cm	m_A = 50g	m_B = 150g
b) AB = 70cm	m_A = 25g	m_B = 10g
c) AB = 50cm	m_A = 60g	m_B = 40g
d) AB = 60cm	m_A = 15g	m_B = 30g

*XII-4 Vamos generalizar, até certo ponto, a definição do centro de massa de duas partículas.

Considere três partículas cujas massas respectivas são m_A, m_B, m_C.

Essas partículas estão situadas nos vértices de um triângulo qualquer.

Chame G_{AB} o centto de massa das partículas A e B.

Suponha então que as partículas A e B sejam substituídas por uma partícula P (o fantasminho Psiu), de massa $m_A + m_B$, e situada em G_{AB}.

Seja G o centro de massa das partículas P e C.

G é por definição o centro de massa das três partículas iniciais.

Já entendeu bem isto?

Então procure e construa:

1) o centro de massa de três partículas situadas nos vértices de um triângulo equilátero e cujas massas são respectivamente proporcionais a 1, 2 e 3.

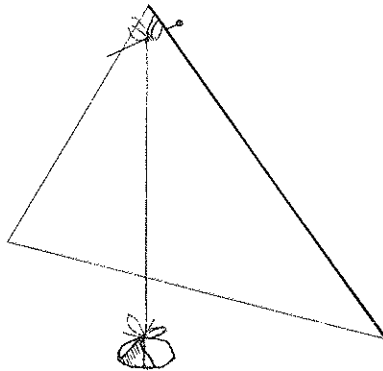
2) o centro de massa de três partículas idênticas situadas nos vértices de um triângulo qualquer. Êsse ponto é característico da geometria do triângulo. Qual é?

*XII-5 Na seção XII-4, aprendemos que o centro de gravidade de um sistema de duas partículas coincide com o centro de massa.

Essa propriedade é geral. Não vamos parar para demonstrá-lo. Aceitaremos isso como fato.

Recorte então um triângulo qualquer numa fôlha de papelão ou de cartolina (Tampa de caixa de sapato serve). Os lados do triângulo deveriam ter de 10 a 20cm.

Atravesse um alfinete em um dos vértices, perpendicularmente ao plano do triângulo e suspenda também um fio de prumo (linha + pedra) ao alfinete.

Pegue o alfinete nas duas pontas, entre polegar e dedo maior (cuidado para não espetar-se!) e deixe o triângulo livre de oscilar em um plano vertical.

Assim que o sistema está em qquilíbrio, marque o ponto em que o fio de prumo encontra o lado oposto ao alfinete.

O furo do alfinete e o ponto que você acaba de marcar define uma reta.

Qual é o sentido físico dessa reta? Onde se encontra o centro de mas

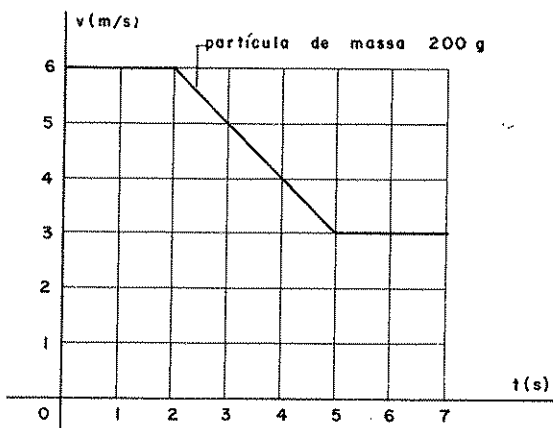
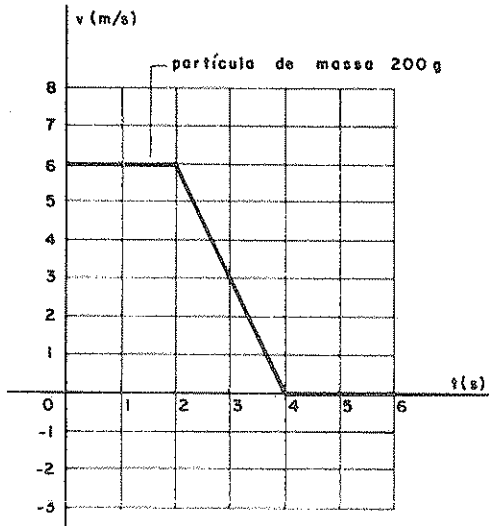
sa do triângulo? Se você foi cuidadoso na experiência, você deve observar que aquela reta é característica da geometria do triângulo. Qual é?

Baseando-se sôbre a experiência realizada, como é que você faria para determinar a posição do centro de massa do triângulo?

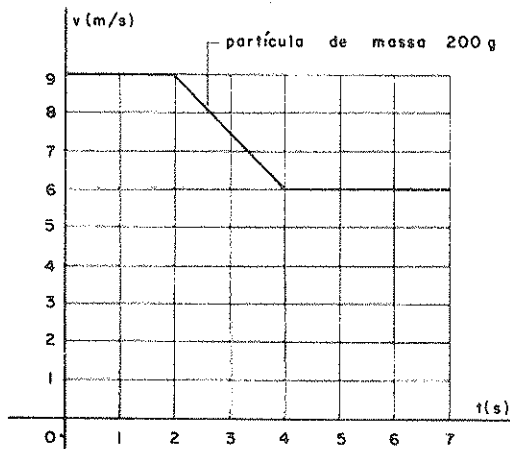
XII-6 Baseando-se em considerações de simetria, diga onde se encontra o centro de massa de:

1) uma chapa retangular homogênea.
2) uma chapa circular homogênea.
3) uma esfera homogênea.
4) um cilindro homogêneo.

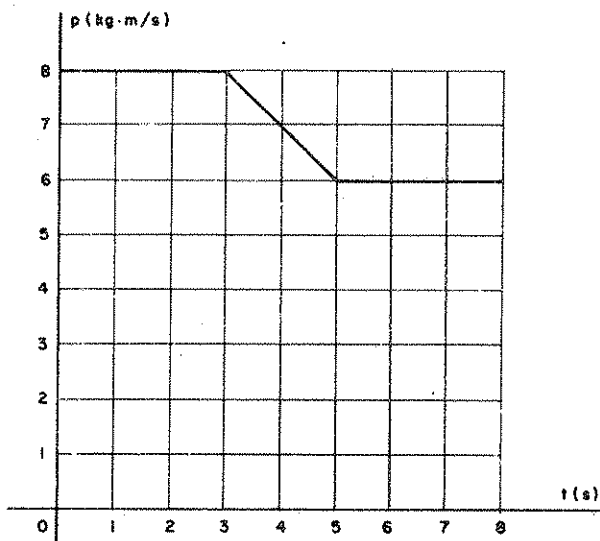
*XII-7 A figura abaixo reproduz, esquematizando-o, o gráfico v vs t de uma partícula de massa 200g que interage unidimensionalmente com uma partícula de massa 100g inicialmente em repouso no Laboratório.

Construa o gráfico v vs t da partícula cuja massa é 100g.

*XII-8 Êste problema se refere ainda a uma interação entre as duas partículas do problema precedente. Construa o gráfico v vs t da partícula cuja massa é 100g, com a seguinte condição: o módulo da velocidade relativa das duas partículas é o mesmo antes e depois da interação.

*XII-9 Mais um problema relativo à interação das partículas do Problema XII-7.

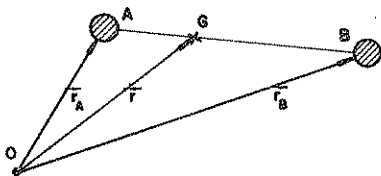
Observa-se que depois da interação, as duas partículas continuam juntas.

Construa o gráfico v vs t da partícula cuja massa é 100g.

XII-10 Duas partículas isoladas das ações externas interagem unidimensional - mente.

O gráfico p vs t de uma das partículas está representado abaixo.

Antes da interação a outra partícula estava em repouso no Laboratório. Construa o gráfico p vs t dessa partícula.

*XII-11 Mostremos que, sendo o centro de massa G de duas partículas definido por

$$r^* = \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B}$$

o ponto G divide internamente o segmento AB na razão inversa da razão das massas das partículas.

Para tanto, avalie $\vec{GA} = \vec{r}_A - \vec{r}*$, em que você substituirá $\vec{r}*$ pelo valor dado anteriormente.

Da mesma forma, avalie $\vec{GB} = \vec{r}_B - \vec{r}*$.

Finalmente, compare $\vec{GA}$ e $\vec{GB}$.

XII-12 Encontre de novo, utilizando a definição vetorial, a posição do centro de massa de três partículas idênticas situadas nos vértices de um triângulo qualquer (ver Problema XII-4).

Sugestão: escôlha a origem das posições em um dos vértices.

*XII-13 Demonstremos que mesmo se o referencial do centro de massa não fôr inercial, o momentum total no RCM é nulo.

O RCM não será inercial se as partículas interagirem com o exterior.

Se por exemplo eu fizesse interagir os carrinhos sôbre uma calha inclinada (em vez de horizontal) então os carrinhos conversariam entre si e com a Terra.

O sistema não sendo mais isolado, o movimento do CM não seria mais uniforme e o RCM não seria inercial.

Mas mesmo assim...

Mesmo assim, o CM é sempre definido por $\vec{r}* = \dfrac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B}$.

E a velocidade do centro de massa continua sendo

$$\vec{v}* = \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B}.$$

Ora, se eu defino agora como RCM um referencial em translação no Laboratório com a velocidade do centro de massa, quanto vale $\vec{v}*$ nêsse referencial?

E quanto vale então, sempre no RCM, a soma $m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$, isto é, o momentum total do sistema?

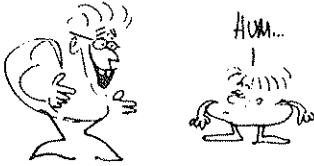
XII-14 Volte ao gráfico da Figura XII-25. A massa do carrinho A é 600g, e a do carrinho B, 400g.

Construa o gráfico P vs t da interação, no RCM.

CAPÍTULO XIII

2a e 3a Leis de Newton

Princípio de Superposição

MARTINS E EU

XIII-1 Transferência de momentum numa interação.

XIII-1-1 A experiência.

Você se lembra da experiência da "minhoca", dos Capítulos X e XII?

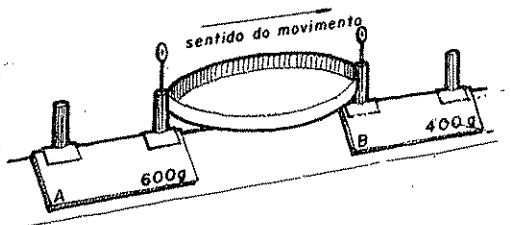



Figura XIII-1

Dois carrinhos prêsos por uma mola (Fig. XIII-1) estão isolados em cima de calha da de ar.

E lá vão êles, andando e oscilando.

A câmera giratória observa a interação e nos fornece os gráficos s vs t dos carrinhos. Êsses gráficos são os da Fig. XIII-2, repetida do Capítulo XII.

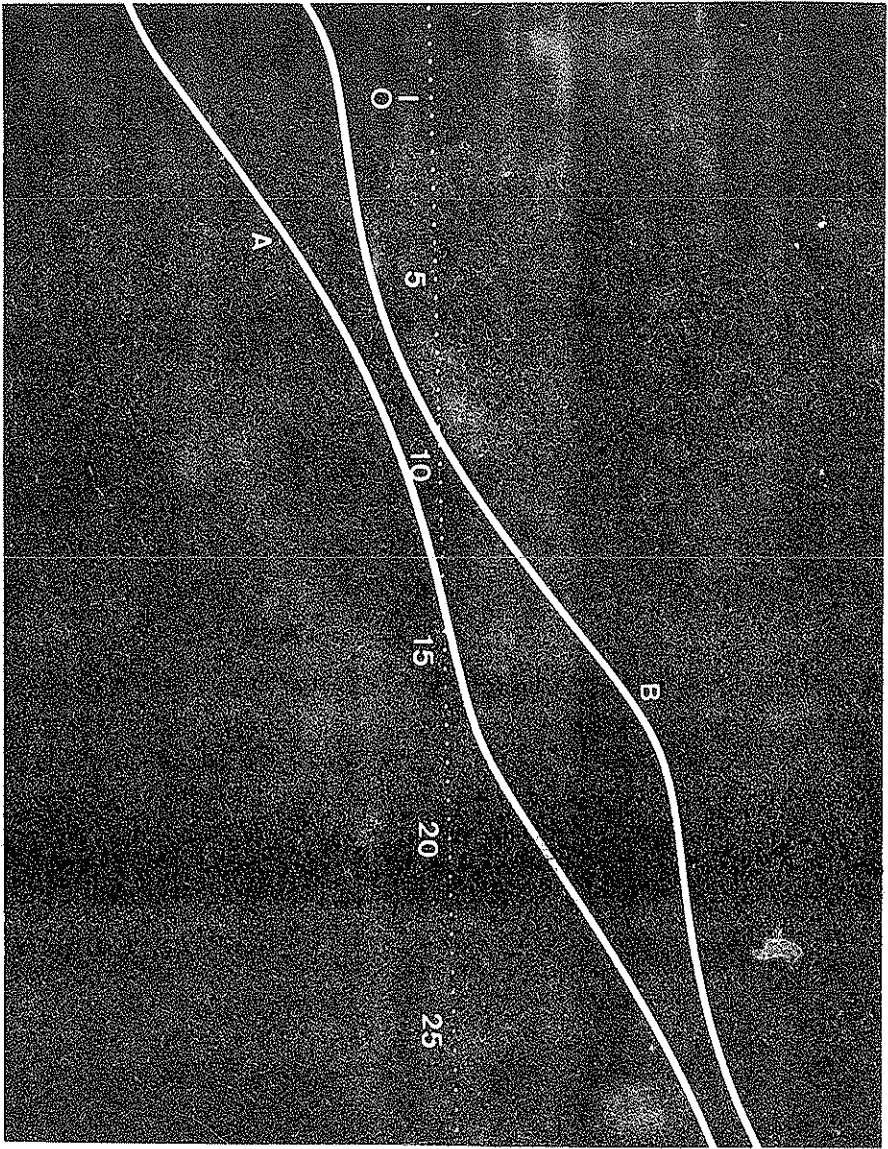



Figura XIII-2

Eu lembro que, o eixo dos tempos é fornecido por um estroboscópio situado imediatamente atrás da trajetória dos carrinhos, e que pisca com frequência constante (10 por segundo na experiência presente).

Êsse eixo é a linha central pontilhada da fotografia.

A origem dos tempos está assinalada em 0. Tomei como unidade arbitrária dois intervalos sucessivos.

E graduei o eixo de zero até 25 unidades.

XIII-1-2 Análise da experiência.

Os gráficos v vs t da interação estão construídos na Fig. XIII-3. O referencial é o Laboratório.

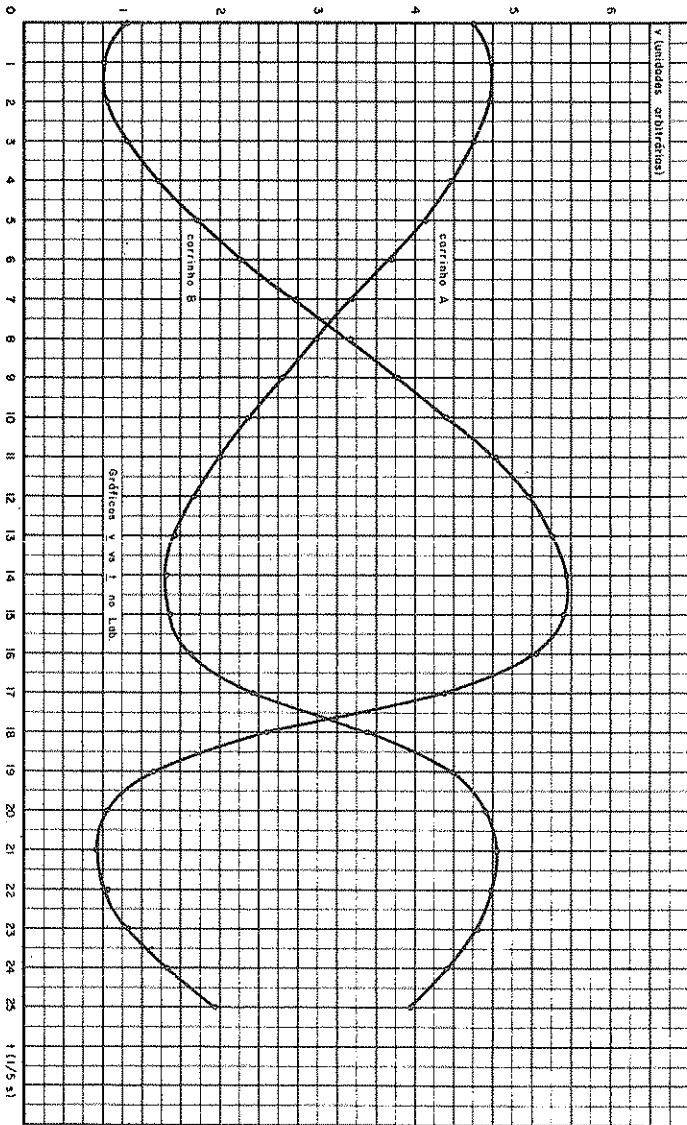



Figura XIII-3

Construamos os gráficos p vs t, a partir dos gráficos v vs t. São os da Fig. XIII-4.

Êles são também representados no Laboratório.

As unidades de momentum são arbitrárias: tomei 1 como massa do carrinho B, e 1,5 como massa do carrinho A.

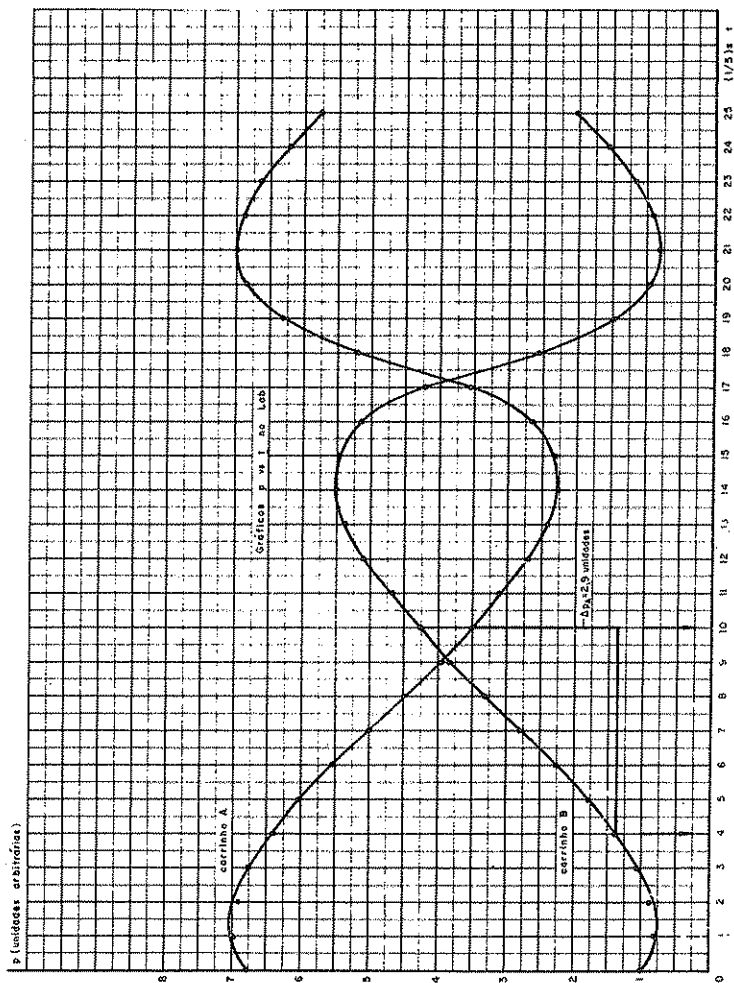



Figura XIII-4

Mas será que a grandeza importante na interação é o momentum?

Há um meio simples de sabê-lo: construir os gráficos p vs t em um outro referencial.

Qual?

Mas por quê não o RCM, heim?

A Fig. XIII-5 reproduz êsses gráficos.

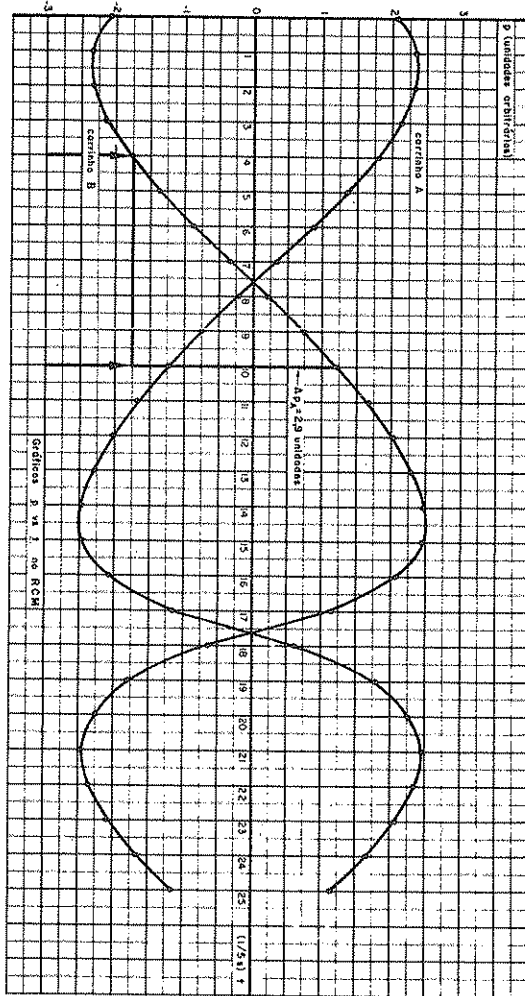



Figura XIII-5

As curvas dos gráficos p vs t no RCM são diferentes das curvas p vs t no Laboratório.

Os momenta são diferentes, o que não é de estranhar, aliás, você não acha?

Ah! mas então os momenta não podem ser grandezas decisivas no estudo de uma interação.

Pois se basta mudar de referencial para mudar os momenta...

Mas observe o que acontece em um intervalo qualquer; o intervalo (4 - 10) por exemplo.

A variação de momentum do carrinho A no Laboratório, durante o intervalo, é 2,9 unidades. Veja a Fig. XIII-4.

E no RCM é também 2,9 unidades! Veja a Fig. XIII-5.

De modo que se quisermos realmente caracterizar a Física da interação, acho preferível escolher algo que não depende do referencial escolhido.

Por exemplo, a variação do momentum.

Durante um determinado intervalo Δt, a variação Δp_A do momentum da partícula A tem o mesmo valor qualquer que seja o referencial inercial escolhido.

A variação do momentum da partícula B é Δp_B, é também invariante debaixo de uma mudança de referencial inercial, e é obviamente igual a $- \Delta p_A$, pois sendo constante o momentum total,

$$\Delta p_A + \Delta p_B = 0.$$

Não é mesmo?

Lê de novo com todo o cuidado os dois últimos parágrafos.
São muito importantes.
Por que é que eu especifico: "referencial inercial"?
E por que é mesmo que o momentum total é constante, nesses referenciais inerciais?

Bem, então uma interação é realmente caracterizada por uma _transferência_ de momentum de uma partícula para outra.

Mas será que essa história está bem contada?

Veja a Fig. XIII-6. Ela reproduz idênticamente os gráficos _p_ vs _t_, no RCM da Figura XIII-5.

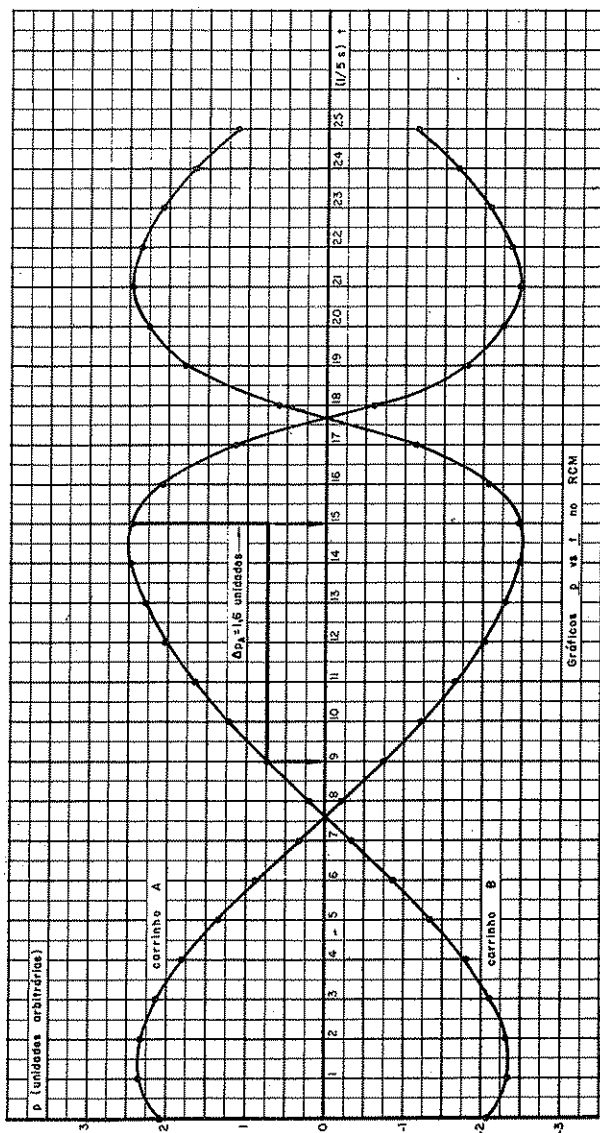



Figura XIII-6

A propósito: do momento que a escôlha do referencial é indiferente para estudar as variações de momentum, escolhi o RCM. Você se lembra? O RCM é o único referencial que as partículas "conhecem". Todos os outros são artificiais: êles são escolhidos por nós.

Mas onde é que estávamos?

Estava perguntando se uma interação é realmente caracterizada pela transferência de momentum somente.

A Fig. XIII-6 mostra um outro intervalo da mesma interação.

Um outro intervalo de mesma duração que o intervalo (4 - 10) da Figura XIII-5.

É o intervalo (9 - 15).

Nêsse intervalo, Δp_A = 1,6 unidades.

Diferente pois que no primeiro intervalo.

O que é que você conclui?

Você deve concluir que no decorrer de uma interação a taxa média de variação do momentum, durante intervalos de tempos iguais, depende do intervalo escolhido.

Na experiência presente:

- no intervalo (4 - 10):

$$\frac{\Delta p_A}{\Delta t} = \frac{2,9}{6,0} = 0,48 \text{ unidade arbitrária.}$$

- no intervalo (9 - 15):

$$\frac{\Delta p_A}{\Delta t} = \frac{1,6}{6,0} = 0,27 \text{ unidades arbitrárias.}$$

Ah! Será que você entende agora que o que realmente importa numa interação não é afinal das contas a transferência de momentum e sim a rapidez com que se produz essa transferência?

O que importa é a taxa de transferência de momentum.

No intervalo (4 - 10) a taxa de transferência média de momentum do carrinho B para o carrinho A é maior que no intervalo (9 - 15).

E o que acontece físicamente para diferenciar êsses dois intervalos?

Volte aos gráficos s vs t fotografados na Fig. XIII-2.

Você sabe desde o Capítulo XII que a distância vertical entre as duas curvas, em determinado instante, é proporcional à distância real entre os dois carrinhos, naquêle mesmo instante.

Pois bem, a fotografia XIII-2 mostra que no intervalo (4 - 10) a distância média entre os carrinhos é menor que no intervalo (9 - 15).

E consequentemente, a mola está mais comprimida no intervalo (4 - 10) que no intervalo (9 - 15).

Mola comprimida?...

Mola deformada?...

Fôrça!

Mas espere um pouco. No Capítulo IX as fôrças que deformam eram chamadas fôrças estáticas! Òbviamente na experiência presente os carrinhos não estão em equilíbrio...

Ah! já sei! No Capítulo IX aprendemos que para haver equilíbrio duas fôrças pelo menos são necessárias. Havendo sòmente uma, ou duas, ou três... cuja resultante não seja nula, não há equilíbrio. A partícula acelera.

É isto mesmo que eu estava explicando ao Martins no final do Capítulo IX.

De maneira que...

...SÃO FÔRÇAS QUE SÃO RESPONSÁVEIS PELA TRANSFERÊNCIA DE MOMENTUM NUMA INTERAÇÃO.

XIII-1-3 E se não houver molas?

Na experiência precedente eu posso ver que são fôrças que respondem pela transferência de momentum na interação.

Eu vejo a mola deformada.

Eu poderia medir a fôrça pela deformação.

Em UF talvez...

Mas a Fig. XIII-7 mostra dois carrinhos com ímãs, polos de mesmo nome frente a frente.

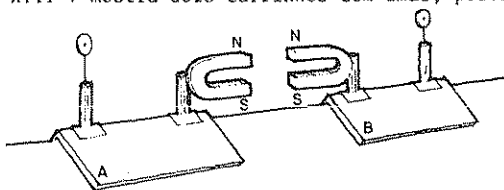



Figura XIII-7

Se o carrinho A é lançado contra o carrinho B, há repulsão entre os dois e a interação é semelhante à que conseguíamos no Capítulo XI com a mola em forma de ferradura; você se lembra?

Há de novo transferência de momentum entre os carrinhos.

Como se houvesse uma mola.

Mas não há mola...

...Você não acha que, no fundo, tanto faz para o carrinho A ou para o carrinho B?

Eu quero dizer o seguinte: o que o carrinho A, por exemplo, conhece do carrinho B, no decorrer da interação, é a transferência de momentum que êle sofre.

Ou melhor, a taxa da transferência de momentum.

Carrinho não vê molas. Êle sente que o seu momentum varia com determinada rapidez.

Êle diz: há uma fôrça agindo.

A partir de agora não precisamos olhar para saber se há ou não mola, ou ímã, sei lá o que!

Arquimedes dizia: "Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio e eu suspenderei o mundo".

Você pode dizer: "Dê-me um gráfico p vs t e eu lhe direi se há fôrças".

Um gráfico p vs t ... em um referencial inercial, claro.

XIII-2 Segunda Lei de Newton: Definição da fôrça de interação.

A Segunda Lei de Newton é a lei fundamental da Dinâmica da partícula.

Ela diz exatamente o que acabamos de descobrir, ou seja: são fôrças que produzem as transferências de momenta medidas em referenciais inerciais, no decorrer das interações.

E ela indica a seguir o processo operacional que permite medir a fôrça, transformando-a consequentemente em grandeza física.

Ela diz: se realmente a interação, para uma partícula, se caracteriza pela rapidez com que o seu momentum está variando, então diremos que a fôrça média de interação que age sôbre essa partícula, no intervalo Δt, é medida pela taxa média de variação de momentum durante êsse intervalo:

$$\langle\vec{F}\rangle \equiv \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \qquad \text{(XIII-1)}$$

(Lembre-se que o sinal $\equiv$ significa: "é por definição igual a...").

E no instante t a fôrça instantânea de interação é medida pela taxa instantânea de variação do momentum da partícula:

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{(XIII-2)}$$

Essas taxas devem ser medidas em um referencial inercial.

Pode ser o Laboratório, pode ser o RCM... qualquer referencial serve, desde que seja inercial.

E por que é mesmo que deve ser inercial?

Porque a Primeira Lei de Newton, ao definir os referenciais inerciais, afirma que nêsses referenciais o momentum de uma partícula isolada é constante.

Seguindo-se que se, nêsses referenciais, o momentum de uma partícula não fôr constante, então a partícula interage com outra (ou outras...).

E porque sòmente os referenciais inerciais possuem a propriedade que descobrimos ao analizarmos a interação dos dois carrinhos, na seção XIII-1-2: as variações de momenta são invariantes numa mudança de referenciais desde que êsses referenciais sejam inerciais.

Se as variações de momenta (em um intervalo dado Δt, claro) são invariantes, as fôrças também o serão.

Essa invariança é que faz da fôrça uma grandeza de importância fundamental em Dinâmica.

Você talvez se pergunta:

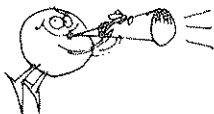
"Mas onde está o enunciado da 2a. Lei de Newton?"

Paciência, você terá o enunciado logo mais adiante.

Mas não é o enunciado que importa.

Importa é que você tenha entendido o que precede.

Lê de novo tudo isto com muita atenção.

E agora vamos ao

Se a interação entre duas partículas fôr estudada em um referencial inercial:

a) a interação é caracterizada por uma transferência de momentum entre as partículas;
b) os agentes dessa transferência são as fôrças de interação que agem sôbre as partículas;
c) a fôrça de interação que age sôbre uma partícula é igual à taxa de variação do momentum da partícula:

$$\boxed{\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Há outra maneira de expressar a segunda Lei de Newton.

O momentum $\vec{p}$ é igual a $m\vec{v}$. Como de costume, m é a massa, e $\vec{v}$ a velocidade, da partícula.

Em todos os problemas que encontraremos, a massa das partículas, dos carrinhos, ou das pedras do Martins, serão constantes.

Então a taxa de variação do momentum será sempre igual ao produto da massa pela taxa de variação da velocidade.

E como a taxa de variação da velocidade é a aceleração $\vec{a}$ da partícula escreveremos

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \qquad \text{(XIII-3)}$$

É geralmente nessa forma que você utilizará a segunda Lei por enquanto.

XIII-3 Unidade de fôrça.

Vamos agora justificar o Newton como unidade de fôrça.

Você se lembra que no Capítulo IX introduzimos o Newton sem mais nem menos. Estávamos brincando com UF, a unidade "faz de conta", e passamos para a unidade "séria".

Segue a apresentação formal:

O Newton é a fôrça que, aplicada a uma partícula, produz uma taxa de variação de momentum de $1kg.m/s^2$, medida em um referencial inercial.

Você poderá também dizer:

O Newton é a fôrça que, aplicada a uma partícula cuja massa é 1kg, produz uma aceleração de $1m/s^2$, medida em um referencial inercial.

É a mesma coisa, não é mesmo?

Duas perguntas:

1) Explique a unidade :$kg.m/s^2$ da primeira definição.
2) Escrevi $1kg.m/s^2$,... 1kg,... $1m/s^2$.

Êsses 1 são "1 com <u>um</u> algarismo significativo" ou... ou quê?

XIII-4 <u>Terceira Lei de Newton: Ação e reação</u>.

XIII-4-1 <u>Estudo das fôrças de interação</u>.

Sabemos agora o que é a fôrça de interação, e como se mede.

Taxa de variação de momentum...

Simples, no fundo.

É só traçar tangentes e medir coeficientes angulares!

É o que eu fiz para a interação entre os dois carrinhos.

Escolhi os gráficos <u>p</u> vs <u>t</u> da Fig. XIII-6.

Mas òbviamente poderia ter escolhido os da Fig. XIII-5. Ou XIII-4. Não é mesmo?

A Fig. XIII-8 mostra o resultado.

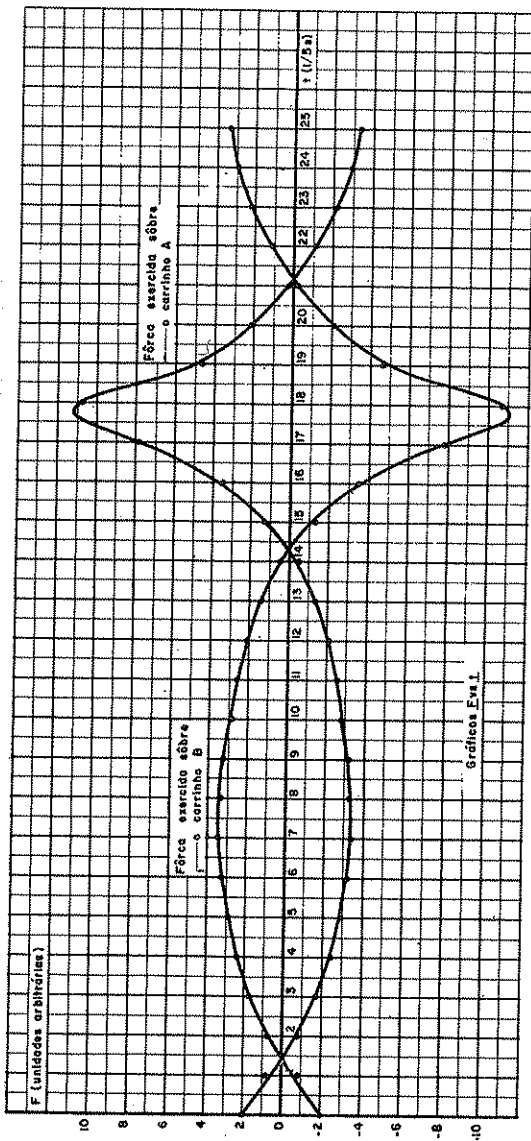



Figura XIII-8

Nessa Figura estão representados os gráficos $\underline{F}$ vs $\underline{t}$ da interação. Uma das curvas refere-se à fôrça exercida sôbre o carrinho A; a outra refere-se à fôrça exercida sôbre o carrinho B.

Você não deve estranhar $\underline{F}$ em vez de $\vec{F}$.

É que estamos medindo as taxas de variação do momentum $\underline{p}$ considerado como grandeza escalar. E então temos a fôrça $\underline{F}$ também considerada como grandeza escalar.

Tratando-se de interação unidimensional, não há inconveniente nisto.

Nessas condições um $\frac{dp}{dt}$ positivo significa simplesmente uma fôrça $\vec{F}$ dirigida para o sentido positivo do eixo $\underline{s}$ utilizado para medir as posições escalares dos carrinhos (Fig. XIII-9).

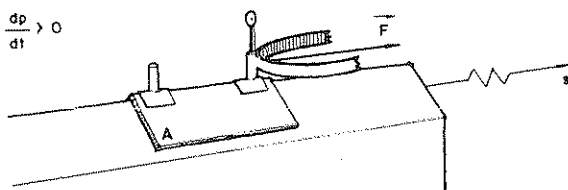



Figura XIII-9

Preste atenção às curvas da Fig. XIII-8.

A fôrça exercida sôbre o carrinho $\underline{A}$ é positiva em $t = 0$.

Fôrça positiva significa fôrça no sentido do movimento do carrinho.

Fôrça que puxa; fôrça que acelera o carrinho.

Ora, para que a mola situada entre os dois carrinhos possa puxar o carrinho A, a mola deve estar estendida, isto é, mais comprida que no seu estado "natural"!

Veja a Fig. XIII-10, idêntica à Fig. XIII-1, e você se convencerá disso.

Figura XIII-10

Entre t = 1 e t = 2 (em 1/5 s), a fôrça se anula.

Fôrça nula: mola relaxada; mola no seu estado natural.

Entre t = 1,5 e t = 14 (mais ou menos), a fôrça é negativa.

Fôrça negativa: oposta ao movimento. Fôrça que decelera o carrinho.

Para que a fôrça exercida pela mola sôbre o carrinho possa decelerá-lo, a mola deve estar comprimida, menor que no seu estado relaxado.

Em t = 7, a fôrça é negativa e o seu módulo passa por um valor máximo.

O que significa isto?

Voltemos juntos à fotografia da Fig. XIII-2.

Você observa que entre t = 7 e t = 8, a distância entre os carrinhos passa pelo seu valor mínimo. (Veja o Problema XIII-2).

Distância mínima: máxima compressão da mola; deformação máxima.

Deformação máxima? Fôrça máxima (em módulo)! É simples, não é mesmo?

Você continuará sem dificuldade a análise.

O que acontece entre t = 14 e t = 21?

O que acontece em t = 18?

Vamos!... Ótimo!

Do que precede, resulta que a fôrça exercida pela mola sôbre o carrinho A depende do estado da mola ou ainda, depende da distância r entre os

carrinhos.

Será que depende <u>só</u> de <u>r</u>?

Acho que sim. Tôdas as vêzes que a distância entre os carrinhos fôr a mesma, a deformação da mola será a mesma.

E consequentemente a fôrça exercida será a mesma.

Para comprovar isso, construí os gráficos <u>F</u> vs <u>r</u>. São os da Figura XIII-11.

Como é que eu construí êsses gráficos?

É muito simples. Veja: em t = 0 a Fig. XIII-1 me diz que a distância entre os carrinhos é 3,1 unidades arbitrárias (*). E o gráfico <u>F</u> vs <u>t</u> do carrinho <u>A</u> (Fig. XIII-8) me diz que nêsse instante a fôrça é +2 unidades.

Então no gráfico <u>F</u> vs <u>r</u> para o carrinho <u>A</u>, eu posso construir o ponto (r = 3,1 F = 2). <u>E tôdas as vêzes que a distância volta a ser 3,1 unidades, a fôrça volta a ser 2 unidades!</u>

Repito a construção para uma dezena de valores diferentes de <u>r</u>. Pronto!

Observe os gráficos: quando a mola está comprimida ela freia o carrinho <u>A</u> (fôrça negativa) mas acelera o carrinho <u>B</u> (fôrça positiva).

Quando a mola está estendida ela acelera o carrinho <u>A</u> (fôrça positiva) e freia o carrinho <u>B</u> (fôrça negativa).

Mas há outra coisa que salta literalmente aos olhos quando olhamos para os gráficos <u>F</u> vs <u>t</u> (Fig. XIII-8) ou <u>F</u> vs <u>r</u> (Fig. XIII-11):

<u>os gráficos são simétricos em relação ao eixo dos tempos</u> (Fig.XIII-8) <u>ou em relação ao eixo das distâncias</u> (Fig. XIII-11).

Conclusão: a evidência experimental mostra que em qualquer instante e para qualquer valor da distância entre os carrinhos, as fôrças de interação que agem respectivamente sôbre o carrinho <u>A</u> e sôbre o carrinho <u>B</u> são diretamente opostas.

Mesmo módulo, mesma direção, mas sentidos contrários.

(*) Por que 3,1 unidades arbitrárias? Medi a distância entre os dois gráficos na fotografia original: achei 3,1cm. Posso então afirmar que a distância entre os carrinhos, em t = 0, era proporcional a 3,1. Ou seja: 3,1 unidades arbitrárias.

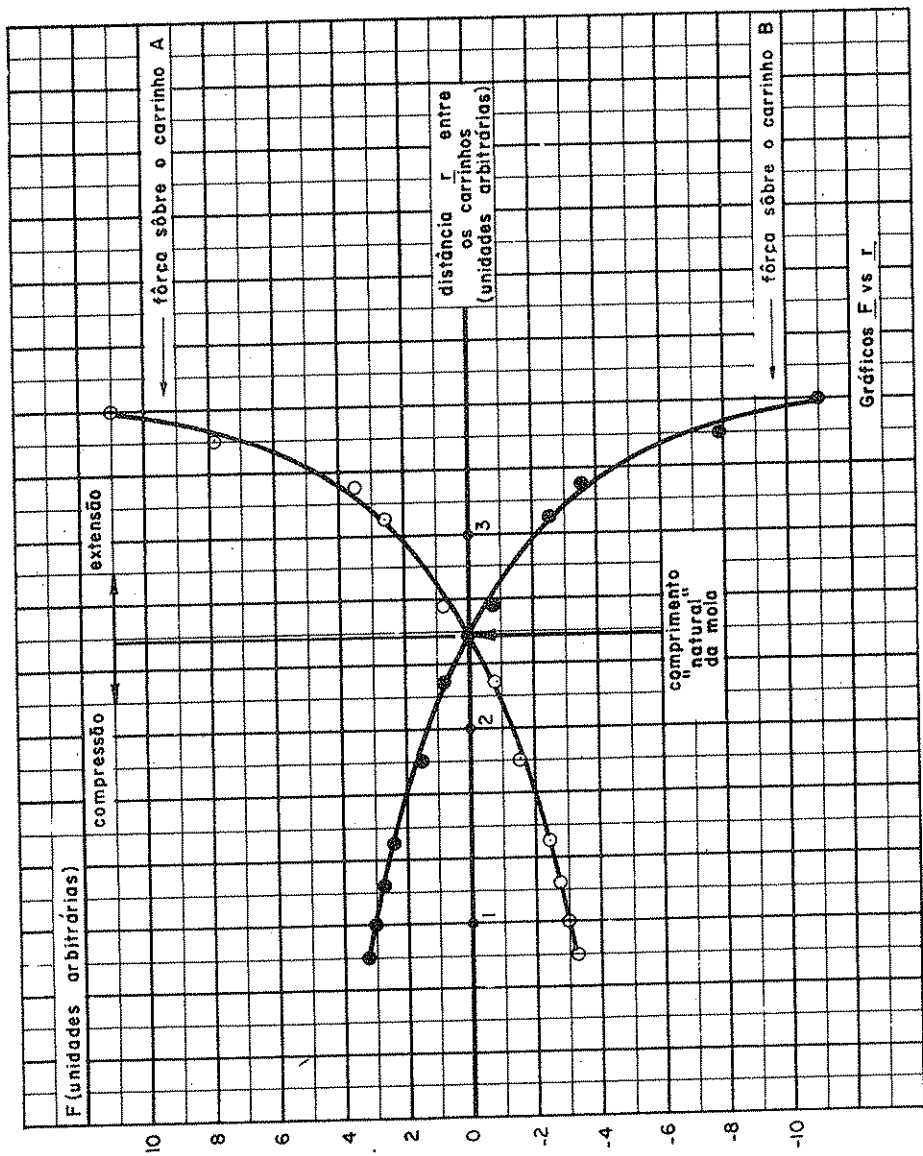



Figura XIII-11

Se $\vec{F}_A$ é a fôrça de interação que age sôbre o carrinho A, e se $\vec{F}_B$ é a fôrça de interação que age sôbre o carrinho B :

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B.$$

Mas será que isso é tão estranho assim?...

XIII-4-2 Terceira Lei.

Duas partículas interagem.

O sistema é isolado do resto do Universo.

Consequentemente o momentum total se conserva:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{Cte}$$

Se, no intervalo dt da interação, o momentum $\vec{p}_1$ varia de $d\vec{p}_1$, o momentum $\vec{p}_2$ deve variar de $d\vec{p}_2$ e teremos

$$d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = 0,$$

ou seja $$d\vec{p}_1 = -d\vec{p}_2. \qquad \text{(XIII-4)}$$

Tudo isto foi visto no Capítulo XI.

Muito bem! Dividamos a equação (XIII-4) por dt. Transformaremos as variações de momenta em taxas de variações:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \qquad \text{(XIII-5)}$$

Mas pela Segunda Lei as taxas de variação dos momenta são as fôrças de interação...

...desde que as medidas sejam efetuadas em um referencial inercial, claro!

A equação (XIII-5) escreve-se então:

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2} \qquad \text{(XIII-6)}$$

Essa relação traduz a Terceira Lei de Newton:

Se duas partículas interagem, as fôrças de interação medidas em um referencial inercial são diretamente opostas.

Ação e reação de novo!

Nunca esqueça, evidentemente, que ação e reação agem sôbre partículas diferentes.

XIII-5 Impulso de uma fôrça.

XIII-5-1 Definição e unidade.

Suponha que a fôrça $\vec{F}$ de interação que age sôbre uma partícula seja constante (Fig. XIII-12).

No instante t o momentum da partícula é $\vec{p}_1$.

A fôrça $\vec{F}$ faz variar o momentum da partícula.

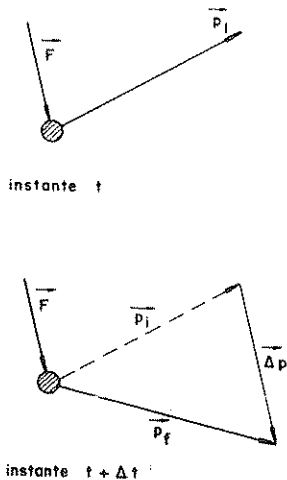



Figura XIII-12

No intervalo Δt a variação será $\vec{\Delta p}$ e pela 2a. Lei:

$$\vec{F} = \frac{\vec{\Delta p}}{\Delta t}$$

Isso mostra que

$$\vec{\Delta p} = \vec{F}\,\Delta t. \qquad \text{(XIII-7)}$$

Você conclui que a variação de momentum $\vec{\Delta p}$ tem sempre a direção e o sentido da fôrça $\vec{F}$.

Se você conhece a fôrça $\vec{F}$ e o intervalo Δt durante o qual ela age,

você conhece a variação de momentum $\Delta\vec{p}$.

O produto $\vec{F}\Delta t$ é chamado impulso da fôrça $\vec{F}$ durante o intervalo Δt.

O impulso de uma fôrça "contabiliza" a variação correspondente do momentum da partícula.

Não é preciso lhe dizer que impulso é grandeza vetorial. Não é o produto de uma fôrça, que é grandeza vetorial, por um escalar: o tempo?

A unidade de impulso é o produto da unidade de fôrça pela unidade de tempo.

É pois o Newton.segundo (N.s).

XIII-5-2 Um exemplo.

E agora, para gravarmos melhor o que acabamos de discutir, façamos juntos um problema.

Suponha que a fôrça de interação que age sôbre uma partícula varie em função do tempo conforme o gráfico da Fig. XIII-13 ao lado.

Figura XIII-13

A interação é unidimensional.

De quanto varia o momentum da partícula durante a interação?

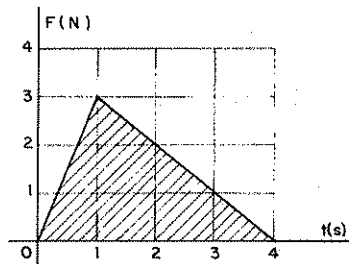
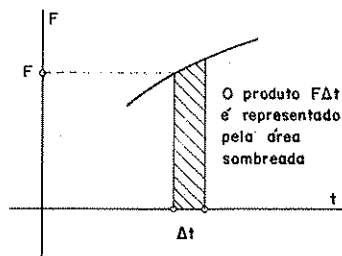
O problema é unidimensional. Conseqüentemente tôdas as grandezas podem ser tratadas escalarmente.

Subdivida mentalmente o intervalo da interação em um número muito grande de sub-intervalos Δt.

Em cada um dêsses sub-intervalos o impulso $F\Delta t$ da fôrça é representado pela área sombreada da Figura XIII-14 ao lado.

Figura XIII-14

De modo que o impulso da fôrça durante o intervalo todo da interação é representado pela área limitada:

- pela curva F vs t.
- pelo eixo dos tempos.

- pelas retas que limitam o intervalo da interação.

Como, Martins?
Você está me dizendo que vimos algo análogo no Capítulo IV quando calculávamos variações de posição a partir do gráfico v vs t, e variações de velocidade a partir do gráfico a vs t?
Mas é óbvio!
E você acaba de me dar uma bôa idéia para explicar isso melhor.
Veja: nas interações unidimensionais passamos dos gráficos v vs t e a vs t para os gráficos p vs t e F vs t respectivamente, multiplicando as ordenadas pela massa m da partícula. De acôrdo?
Então, já que um Δv se mede por uma área no gráfico a vs t, um Δp vai se medir por uma área no gráfico F vs t. Não é mesmo?

Medindo a área do triângulo sombreado da Fig. XIII-13 você achará $F\Delta t = 6{,}0$N.s.

Consequentemente, durante a interação, o momentum da partícula variou de 6,0kg.m/s.

XIII-5-3 Um outro exemplo.

Voltemos à experiência do "tiro do projétil" utilizada nos Capítulos VI e VIII, quando estudávamos Cinemática. Você se lembra?

A Fig. XIII-15 reproduz a fotografia estroboscópica do movimento de uma bola, depois de deixar a rampa de lançamento que você vê à esquerda da foto.

Os intervalos entre dois flashes sucessivos são de $\frac{1}{10}$ s.

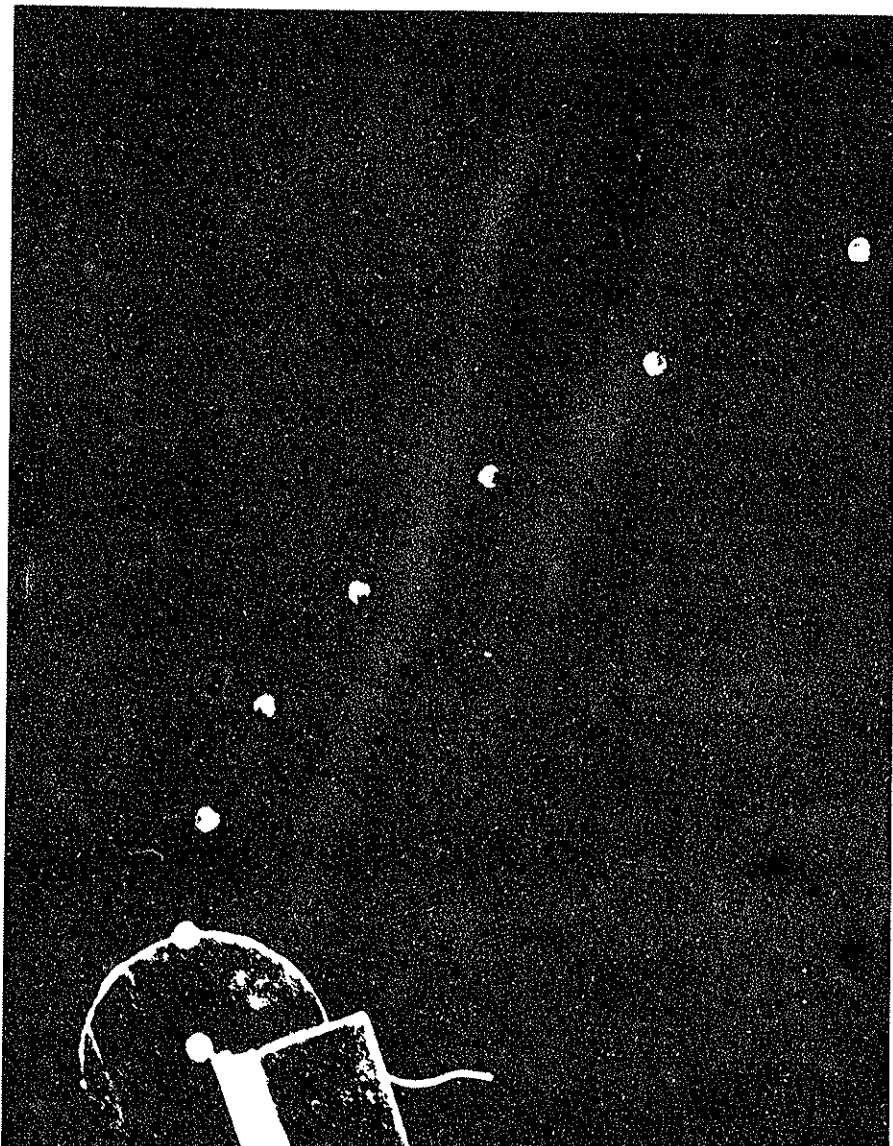



Figura XIII-15

Para poder trabalhar mais fàcilmente, levei as posições da bola para uma fôlha de papel transparente, reproduzida na Fig. XIII-16.

As posições sucessivas são numeradas de 1 até 8.

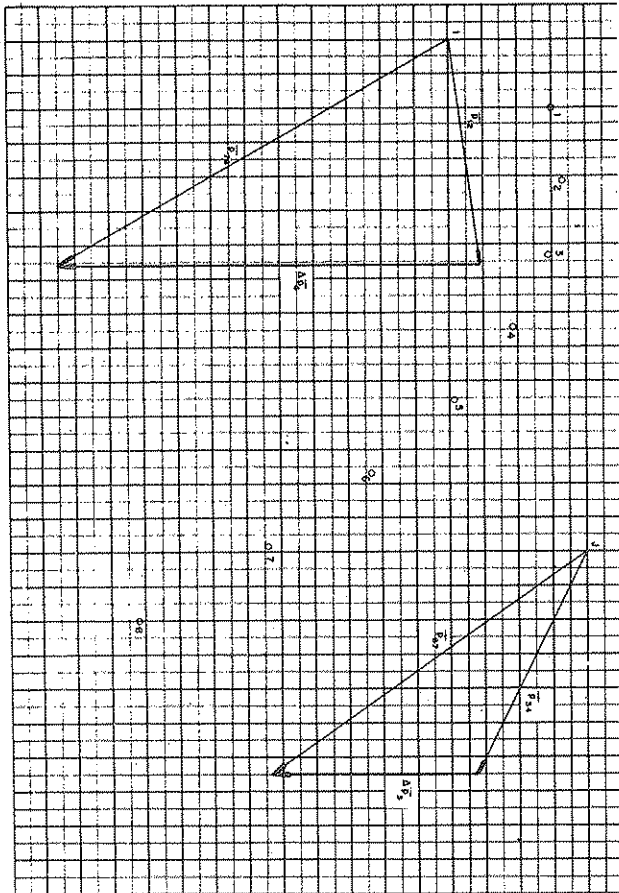



Figura XIII-16

Considere o intervalo (1 - 2). O segmento $\vec{12}$ é proporcional à velocidade vetorial média durante o intervalo.

E consequentemente à velocidade em um instante do intervalo.

Precisamente, aliás, no instante meio do intervalo.

> Essa propriedade é verdadeira para as velocidades escalares no movimento uniformemente variado.
> Ela é também verdadeira para as velocidades vetoriais no movimento com aceleração constante.
> É o caso do movimento dos projéteis.
> Como? Você está dizendo que eu não demonstrei isso?
> Eu sei, eu sei.
> Você é que vai demonstrar a propriedade no Problema XIII-39.
> Aliás, você deve ter visto algo semelhante no Problema VIII-32.

Mas sendo $\vec{12}$ proporcional à velocidade no instante meio do intervalo (1 - 2), é também proporcional ao momentum nêsse instante. Não é mesmo?

Representemos por $\vec{p}_{12}$ êsse momentum. É, repito, o momentum no instante meio do intervalo (1 - 2).

Na Fig. XIII-16 você encontrará $\vec{p}_{12}$ construído a partir do ponto qualquer I. O comprimento do segmento que representa $\vec{p}_{12}$ é três vêzes a distância 1-2.

Da mesma forma $\vec{p}_{78}$, construído a partir do mesmo ponto I, é o momentum da bola no instante meio do intervalo (7-8). O fator de escala é o mesmo que para $\vec{p}_{12}$.

Muito bem. A variação do momentum entre o instante meio do intervalo (1-2) e o instante meio do intervalo (7-8) é $\Delta\vec{p}_6$.

Por quê êsse índice "6"? Porque essa variação deu-se em 6 intervalos de $\frac{1}{10}$ s. Conte na Figura!

Ah! então $\Delta\vec{p}_6$ é igual ao impulso da fôrça que age sôbre a bola durante o intervalo $\Delta t = 6 \times \frac{1}{10}$ s.

A fôrça que age é o pêso $m\vec{g}$ da bola.

Temos assim

$$\Delta\vec{p}_6 = m\vec{g}\ \Delta t$$

Recomecemos as mesmas construções para o momentum $\vec{p}_{34}$ no instante meio do intervalo (3-4) e para o momentum $\vec{p}_{67}$ no instante meio do intervalo (6-7).

Você os encontrará, na Fig. XIII-16, construídos a partir do ponto J.

$\Delta\vec{p}_3$ é a variação do momentum da bola durante os 3 intervalos de 1/10s que separam aquêles dois instantes.

De modo que $\Delta\vec{p}_3$ é igual ao impulso da fôrça que age sôbre a bola durante o intervalo $\frac{1}{2}\ \Delta t = 3 \times \frac{1}{10}$ s.

Mas a fôrça que age sôbre a bola é <u>sempre</u> o seu pêso $m\vec{g}$.

Assim é que:

$$\Delta\vec{p}_3 = \frac{1}{2}\ m\vec{g}\ \Delta t.$$

Conclua: $\Delta\vec{p}_3$ deve ser igual à metade de $\Delta\vec{p}_6$.

<u>Meça</u> na Fig. XIII-16.

O que é que você achou?

Reconfortante, não é mesmo?

Incidentalmente, $\Delta\vec{p}_6$ e $\Delta\vec{p}_3$ devem ter a direção e o sentido da fôrça.

Do pêso $m\vec{g}$.

Qual é a direção vertical na figura XIII-16?

Que tal o fio de prumo que acabamos de inventar?

Eu já ouço o Martins dizer que não há grande vantagem em tudo isto. Afinal das contas, diz êle, já sabíamos que o pêso é vertical, e que é uma fôrça constante.

De acôrdo.

Mas nem sempre, ao estudar uma interação, você conhece de antemão as fôrças.

Pois é geralmente para conhecer essas fôrças que se estudam as interações.

Vamos a um outro exemplo.

XIII-5-4 Fôrças impulsivas.

Deixe cair uma bola (Fig. XIII-17). Ela repica no chão.

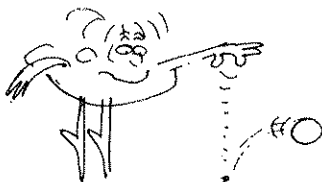



Figura XIII-17

Antes de tocar o chão o momentum da bola era dirigido para baixo.

Depois de repicar o momentum é dirigido para cima.

Durante o tempo muito breve em que o chão e a bola estiveram em contato, houve troca de momentum entre a Terra e a bola.

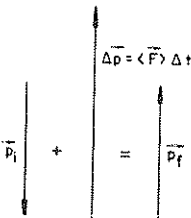
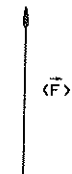
A Terra exerceu sôbre a bola uma fôrça para cima.

A bola exerceu sôbre a Terra uma fôrça para baixo.

Tais fôrças, que se exercem durante intervalos de tempo muito pequenos e que mudam dràsticamente os momenta dos corpos que interagem, são chamadas fôrças impulsivas.

$\langle\vec{F}\rangle$

(c)

Figura XIII-18

O que nos interessa numa interação impulsiva é a fôrça média de interação.

A Fig. XIII-18 mostra as etapas sucessivas da análise de uma interação impulsiva: o caso da bola que repica no chão por exemplo.

(a) Imediatamente antes da interação (antes de tocar o piso), o momentum da bola era $\vec{p}_i$. Imediatamente depois, era $\vec{p}_f$.

(b) Para obter $\vec{p}_f$ eu devo somar $\Delta\vec{p}$ a $\vec{p}_i$: $\Delta\vec{p}$ é a variação de momentum da bola durante a interação impulsiva.

$\Delta\vec{p}$ é contabilizado pelo impulso $\langle\vec{F}\rangle\,\Delta t$ da fôrça média exercida pelo piso durante a interação.

(c) Se pudermos conhecer, por uma medida independente, o intervalo Δt durante o qual a bola e o piso permaneceram em contato, teremos a fôrça $\langle\vec{F}\rangle$ dividindo $\Delta\vec{p}$ por Δt.

De qualquer maneira, $\langle\vec{F}\rangle$ terá sempre a direção e o sentido de $\Delta\vec{p}$.

A interação entre uma raquete de tênis e a bola é uma interação impulsiva.

A interação entre o pé do Pelé e a bola que êle chuta é uma interação impulsiva.

Como é também impulsiva a interação entre o martelo e o prego.

Ou a interação entre uma molécula de ar e a parede da sala em que estamos agora.

O que me lembra de um problema interessante. Vamos estudá-lo juntos.

XIII-6 <u>O elefante e as bolas de pingue-pongue</u>.

Já brincamos de elefantes e bolas de pingue-pongue no Capítulo XI, quando estudávamos a conservação do momentum.

Vamos brincar de novo.

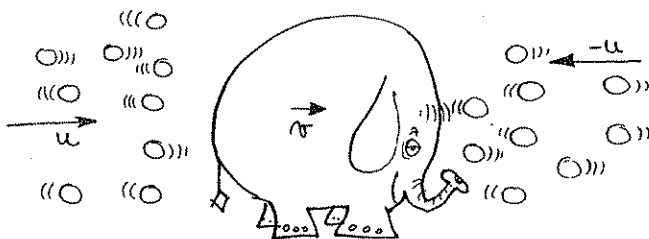



Figura XIII-19

Um elefante foi visitar a Pinguepongueländia.

Êsse país é assim chamado porque o ar lá é feito de bolas de pingue-pongue.

Tôdas andando horizontalmente: a metade em um sentido, o da direita da Fig. XIII-19, com velocidade $\underline{u}$.

E a outra metade no outro sentido, com velocidade $\underline{-u}$.

Isto é, "em média", o ar está em repouso. Certo?

O elefante anda com velocidade constante $\underline{v}$.

Qual é o efeito das suas interações com o "ar de bolas"?

A primeira coisa a fazer, eu acho, é mudarmos de referencial.

Para simplificar.

Porque veja: se por hipótese o elefante está em translação uniforme com velocidade $\underline{v}$ no referencial terrestre, o referencial do elefante é um re-

ferencial privilegiado. É um referencial inercial.

Nêsse referencial, sòmente as bolas estão em movimento. As que se dirigem para a direita têm velocidade (u - v). As que se dirigem para a esquerda têm velocidade -(u + v).

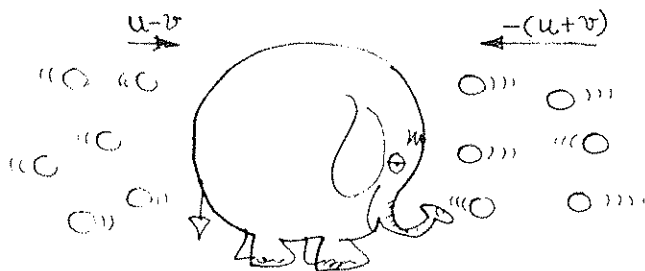



Figura XIII-20

Assim a situação é mais simples do momento que um dos corpos (o elefante) está agora em repouso.

<u>E o problema das fôrças de interação se resolve do mesmo jeito, do momento que uma fôrça tem a mesma medida em qualquer referencial inercial</u>.

Muito bem, vamos lá!

Suponhamos que haja, em média <u>n</u> bolas de pingue-pongue por unidade de volume do "vento". A metade, $\frac{n}{2}$, vai para a direita. A outra metade vai para a esquerda.

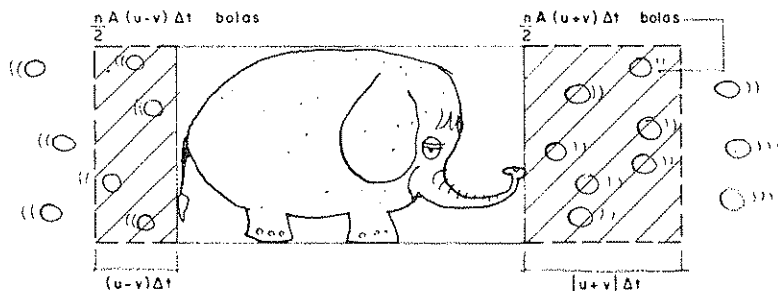



Figura XIII-21

Na Fig. XIII-21, tornei o elefante "quadrado". Êle oferece ao vento uma área A.

Do lado direito, eu representei sòmente as bolas que vão ao encontro do elefante.

As outras òbviamente não interessam.

Quantas bolas batem contra o elefante, vindo da direita, no intervalo Δt?

É muito simples: pensando na situação no instante t, a bola que dista $(u + v)\Delta t$ do elefante vai bater nêle em $(t + \Delta t)$. De modo que as bolas que estão mais afastadas não chegarão a colidir com o elefante no intervalo Δt. Mas as bolas que estão mais pertas colidirão tôdas elas nêsse intervalo.

Ah! então é só construir uma caixa de área A (a área que o elefante oferece ao vento) e de comprimento $(u + v)\Delta t$.

Tôdas as bolas contidas nessa caixa no instante t colidirão com o elefante entre o instante t e o instante $(t + \Delta t)$.

É a caixa sombreada na frente do elefante na Fig. XIII-21.

Qual é o volume da caixa?

Base x altura = $A(u + v)\Delta t$.

Quantas bolas contem a caixa no instante t?

Número de bolas por unidade de volume x volume = $\frac{n}{2} A(u+v)\Delta t$.

Um raciocínio análogo...

...lhe mostrará que o número de bolas que batem no elefante por trás, no mesmo intervalo de tempo, é $\frac{1}{2} nA(u - v)\Delta t$.

Já que conhecemos o número de bolas que colidem com o elefante no intervalo Δt, vindo da direita por um lado e vindo da esquerda por outro, calculemos quanto momentum cada uma delas transfere ao elefante.

A Fig. XIII-22 mostra a situação para uma bola vindo da direita.

Sendo m a massa da bola, ela chega com um momentum $p_i = -m(u+v)$ e repica com um momentum $p_f = m(u+v)$.

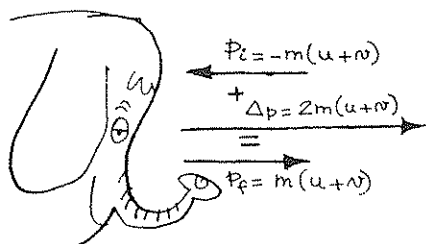



Figura XIII-22

De modo que a variação do momentum da bola é $\Delta p = 2m(u + v)$.

E já que no intervalo Δt cada uma das $\frac{1}{2}$ n $A(u+v)\Delta t$ bolas que vêm da direita sofre a mesma variação de momentum, podemos afirmar que:

o momentum transferido do elefante para as bolas que vêm da direita, no intervalo Δt é

$$mnA(u + v)^2\Delta t$$

Mas qual é, no mesmo intervalo, o momentum transferido das bolas para o elefante?

Você e o Martins já tinham respondido. É $- mnA(u + v)^2\Delta t$.

Ah! mas se o momentum transferido das bolas para o elefante, no intervalo Δt, é $-mnA(u+v)^2\Delta t$, a taxa de transferência dêsse momentum, isto é, a fôrça exercida pelas bolas sôbre o elefante, da direita para a esquerda, é $\frac{\Delta p}{\Delta t}$, ou seja:

$$F_D = -mnA(u + v)^2$$

Faça os mesmos cálculos para as bolas que vêm da esquerda.

Você encontrará que o momentum transferido das bolas para o elefante, no intervalo Δt, é $mnA(u-v)^2\Delta t$.

De modo que a fôrça exercida pelas bolas sôbre o elefante, da esquerda para a direita, é $F_e = mnA(u - v)^2$.

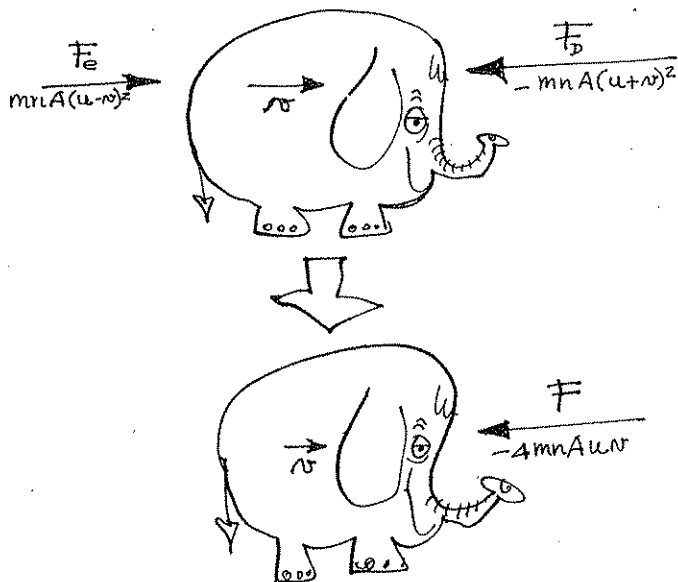



Figura XIII-37

A Fig. XIII-37 mostra as fôrças de interação exercidas sôbre o elefante.

A fôrça resultante é dirigida em sentido contrário da velocidade do elefante. Essa fôrça é $F = -4mnAuv$. (XIII-7)

Observe que na Fig. XIII-37 eu voltei para o referencial terrestre, ou melhor, para o referencial da Pinguepongue1ândia.

Do momento que as fôrças independem do referencial inercial em que operamos... Heim?

Essa brincadeira do elefante e das bolas de pingue-pongue não era inteiramente desinteressada.

O que acabamos de estudar é simplesmente um modêlo da resistência do ar sôbre corpos em movimento.

Ou do vento sôbre corpos em repouso.

Observe. Essa fôrça de resistência é proporcional:

- ao produto mn. Êsse produto é obviamente a densidade do ar: massa de uma... molécula (eu ia dizer "bola") multiplicada pelo número de moléculas por unidade de volume.
- à área da "seção" do elefante perpendicularmente à sua velocidade.
- à velocidade do elefante.

É exatamente o que acontece no caso real (*).

Mas a lição que devemos tirar dêsse exemplo é mais profunda. Vai além de um cálculo de resistência ao movimento.

O que é extraordinário é que com o auxílio da Segunda Lei de Newton conseguimos calcular a fôrça resultante de um bombardeio de partículas sôbre um corpo sem conhecermos exatamente a lei de interação!

(*) Duas observações: 1) O modêlo utilizado é um modêlo grosseiro. As moléculas do ar se movimentam em tôdas as direções e não em duas sômente. Isso modificará o coeficiente numérico na expressão (XIII-7); mas não altera a Física! 2) A expressão calculada é sòmente válida para $v << u$. Se v fôr comparável a u, o modêlo não serve mais. F será proporcional a v^2.

XIII-7 Leis de fôrças - As interações fundamentais.

XIII-7-1 Lei de fôrça de uma interação.

Eu já lhe disse que fundamentalmente, na Natureza, as fôrças de interação dependem sòmente da distância entre as partículas que interagem.

Para melhor caracterizar as interações, os Físicos costumam falar de "fôrça de interação".

Mas como, dirá você? Interação significa duas partículas que "conversam". Há uma fôrça exercida sôbre a partícula (1), e outra fôrça, diretamente oposta à primeira, exercida sôbre a partícula (2).

Qual das duas seria a "fôrça de interação"?

Nenhuma.

Ou ambas...

O negócio é o seguinte: no fundo, quem diz que a fôrça é dirigida para lá ou para cá somos nós.

A Natureza sòmente pode dizer:

- há uma fôrça de atração entre as duas partículas (Fig. XIII-38-a).

ou

- há uma fôrça de repulsão entre as duas partículas (Fig. XIII-38-b).

Figura XIII-38

... e essa fôrça de atração ou de repulsão é tantas vêzes mais intensa que determinada fôrça escolhida como padrão.

De modo que uma interação é caracterizada:

- por algo que permita diferenciar, convencionalmente, entre atração e repulsão. O mais simples é o sinal algébrico:

negativo → atração
positivo → repulsão.

- por um número: o módulo de qualquer uma das fôrças de interação.

Voltemos por exemplo à experiência da "minhoca" do início dêste Capítulo.

Os gráficos da Fig. XIII-11 mostram que o diâmetro da mola relaxada é aproximadamente 2,5 unidades arbitrárias.

Concluímos que quando a distância entre os carrinhos é menor que 2,5 unidades, a mola está comprimida e a fôrça de interação é repulsiva. Será convencionalmente positiva.

E se a distância entre os carrinhos é maior que 2,5 unidades, a mola está estendida e a fôrça de interação é atrativa. Será convencionalmente negativa.

A lei de fôrça é a expressão que relaciona a fôrça de interação com a distância entre as partículas.

A lei de fôrça pode ter uma representação exclusivamente gráfica.

É o caso da mola da experiência. Ao olhar para a Fig. XIII-11 você observa que a lei de fôrça é representada pelo gráfico da fôrça de interação que age sôbre o carrinho B (Fig. XIII-39-a).

Tratando-se de molas, é hábito expressar a fôrça de interação, não em função da distância entre as partículas, e sim em função da deformação x da mola.

x é convencionalmente positivo para a extensão, negativo para a compressão. Teremos então o gráfico da Fig. XIII-39-b. Você entendeu como se passa de um ao outro?

A lei de fôrça pode também ter uma expressão analítica.

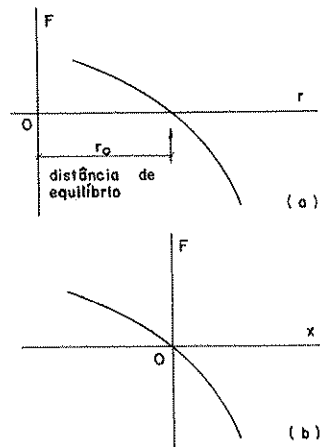



Figura XIII-39

Aí vai um exemplo que encontraremos repetidamente, e cuja importância é grande.

Se tivéssemos utilizado uma mola espiral entre os carrinhos, a lei de fôrça da interação seria linear (Fig. XIII-40). A expressão analítica da lei é nêsse caso:

$$F = - kx \qquad \text{(XIII-8)}$$

Essa lei de fôrça será estudada em detalhe no Capítulo XV.

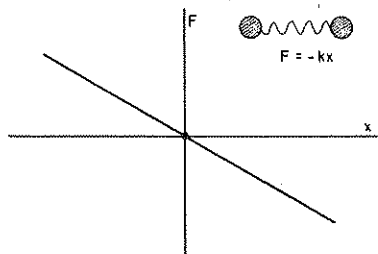



Figura XIII-40

XIII-7-2 As interações fundamentais.

Você provàvelmente acredita que existem na Natureza uma infinidade de fôrças de naturezas diferentes.

Você bate na porta para entrar: fôrça!

O vento empurra o barco no mar: fôrça!

A pedra puxa o elástico que o Martins segura: fôrça!

E a Terra puxa a pedra: fôrça!...

Fôrças em todo lugar, fôrças em tôdas as circunstâncias.

Vivemos literalmente em um mundo de interações.

Mas o que é realmente curioso é que, fundamentalmente, tôdas as interações observadas e estudadas até hoje podem classificar-se em quatro e sòmente quatro categorias.

Há sòmente quatro interações fundamentais na Natureza!

São elas: a interação gravitacional, a interação eletromagnética, a interação forte, e a interação fraca.

XIII-7-2-1 <u>A interação gravitacional</u>.

É a interação familiar que nos liga à Terra...

...que liga a Terra ao Sol...

...o módulo lunar à Lua...

...e evidentemente os elefantes do Pequeno Príncipe ao asteróide B-612.

Já falamos muitas vêzes dessa interação e consagraremos o Capítulo XV ao seu estudo.

A lei de fôrça é simples: a fôrça de interação é <u>atrativa</u>. O seu módulo é proporcional ao produto das massas dos corpos que interagem, e inversamente proporcional à distância que os separa.

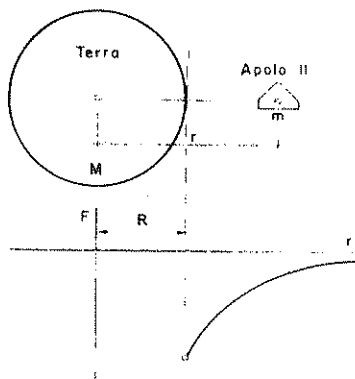
$$F = -\frac{G\,Mm}{r^2} \qquad \text{(XIII-9)}$$

A Fig. XIII-41 mostra a representação gráfica dessa lei no caso mais comum para nós da interação entre a Terra e um objeto qualquer.

Figura XIII-41

A lei (XIII-9) é sòmente válida para $r > R$ (R: raio da Terra).

A constante de proporcionalidade G é chamada: "constante da gravitação universal". Seu valor é $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$.

E agora veja! A constante G é da ordem de 10^{-10} unidades. Qual é a conseqüência disso?

Já adivinhou? <u>A fôrça de interação gravitacional é extremamente fraca</u>, a não ser que pelo menos um dos corpos em presença tenha uma massa muito,

mas muito grande mesmo!

A balança nos torna conscientes da interação gravitacional entre a Terra e cada um de nós. Certo! Mas é porque a massa da Terra é da ordem de 10^{25}kg!

XIII-7-2-2 A interação eletromagnética.

É com certeza a interação mais familiar para todos nós.

Eu lhe expliquei no Capítulo IX que nunca se mede diretamente o pêso de um corpo.

O que se mede é a fôrça oposta ao pêso e que impede o corpo de cair.

Pois bem. Essa fôrça que impede o corpo de cair é sempre de origem eletromagnética.

É a tração exercida por uma corda ou por um elástico. Ou a fôrça exercida pela plataforma de uma balança.

Mas é sempre uma fôrça que nasce da deformação de um corpo. Isto é, das interações múltiplas entre átomos, moléculas ou íon que o compõem.

Tôdas as chamadas "fôrças de contato" são de origem eletromagnética.

Quando você chuta uma bola; quando o vento sopra na vela do barco; quando a mãe empurra o carrinho da criança...

...e quando, de vez em quanto, eu dou um puxão de orelha ao Martins...

...as transferências de momentum entre o pé e a bola, o vento e o barco, a moça e o carrinho, ...ou o Martins e eu..., são devidas às interações eletromagnéticas.

Há mais: são também as interações eletromagnéticas que são responsáveis pelas propriedades químicas dos elementos.

A interação eletromagnética origina-se sempre na "conversa" entre partículas carregadas.

A lei de fôrça fundamental é a lei de Coulomb:

$$F = \frac{K\, q_1 q_2}{r^2} \qquad \text{(XIII-10)}$$

K é uma constante que vale 9×10^9 unidades do Sistema Internacional.

q_1 e q_2 são as cargas das partículas, medidas em Coulomb.

r é a distância em metro entre as partículas.

Como você vê, essa Lei é semelhante à Lei da gravitação (XIII-9). É também uma lei "em-inverso-do-quadrado-da-distância".

Mas há duas diferenças importantes.

Uma é essencial: havendo cargas positivas (protons por exemplo) e negativas (eletrons por exemplo), a interação elétrica pode ser atrativa (interação entre um proton e um eletron) ou repulsiva (interação entre dois protons, ou entre dois eletrons).

A outra é quantitativa. Para você percebê-la bem, façamos juntos o problema seguinte:

Imaginemos dois protons a uma distância r um do outro, e comparemos as "fôrças" da interação elétrica e da interação gravitacional.

As ordens de grandeza dos parâmetros relevantes são:

$G \sim 10^{-10}$

$m_p \sim 10^{-27}$

$K \sim 10^{10}$ unidades SI

$q_p \sim 10^{-19}$

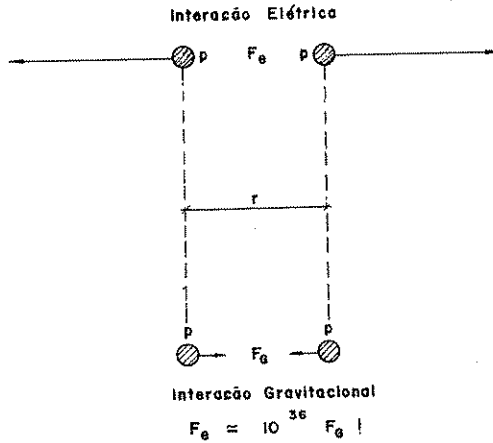



Figura XIII-42

De modo que, em módulos:

$$F_e \sim \frac{10^{10} \times 10^{-19} \times 10^{-19}}{r^2} = \frac{10^{-28}}{r^2} \text{ unidades}$$

$$F_G \sim \frac{10^{-10} \times 10^{-27} \times 10^{-27}}{r^2} = \frac{10^{-64}}{r^2} \text{ unidades}$$

Observe então que

$$\frac{F_e}{F_G} \sim 10^{36}$$

A repulsão elétrica é 10^{36} vêzes maior que a atração gravitacional!

O terceiro volume desta série será consagrado ao estudo da interação eletromagnética.

XIII-7-2-3 A interação forte, ou interação nuclear.

Você já começou a estudar Química.

E consequentemente, você sabe que os núcleos dos átomos são "grãos" extremamente pequenos, cujo diâmetro é da ordem de 10^{-15}m (*). Os núcleos são formados de neutrons e protons.

Neutrons e protons têm aproximadamente a mesma massa (da ordem de 10^{-27}kg). Mas o proton é carregado positivamente, enquanto que o neutron não tem carga.

Em fato, proton e neutron são dois estados diferentes de uma mesma entidade: o núcleon.

E um dos primeiros problemas com que os Físicos se defrontaram, ao tantarem entender a estrutura do núcleo atômico foi o seguinte:

Como é que um conjunto de núcleons pode permanecer "ligado" no núcleo? Por que é que a interação eletromagnética repulsiva entre os protons não "estoura" literalmente o núcleo?

A razão é que há fôrças de ligação, fôrças atrativas, entre os núcleons.

O estudo dessas fôrças constitui a base do ramo da Física conhecido como Física Nuclear. Você que me lê agora será talvez, mais tarde, um Físico Nuclear.

E aprenderá então muito mais a respeito dessas fôrças do que eu posso lhe dizer agora.

Sua contribuição será talvez decisiva: as fôrças nucleares, as fôrças que caracterizam a chamada interação forte, são ainda mal conhecidas.

Eu posso lhe dizer, por enquanto, o seguinte:

- as fôrças nucleares têm um alcance extremamente pequeno à nossa escala. Es-

---

(*) Os diâmetros atômicos são da ordem de 10^{-10}m (≡ 1 Angstrom). Assim é que o núcleo é cem mil vêzes menor que o átomo!

se alcance é da ordem do diâmetro nuclear, ou seja $\sim 10^{-15}$m. Para distâncias maiores ($\sim 10^{-13}$m por exemplo), elas são desprezíveis em comparação com as fôrças eletromagnéticas.

- em compensação, dentro do alcance de $\sim 10^{-15}$m, elas são entre cem e duzentas vêzes mais intensas que as fôrças eletromagnéticas. Essa propriedade dá conta da coesão do núcleo.
- a interação nuclear se processa por intermédio de uma partícula, o pion (ou meson π) cujo estudo é fundamental para a compreensão das fôrças nucleares.

XIII-7-2-4 <u>A interação fraca</u>.

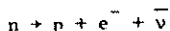
Quase tôdas as partículas conhecidas hoje são instáveis.

Isso significa que elas <u>decaem</u>, transformando-se em outras partículas, depois de um tempo característico da partícula considerada.

Êsse tempo não deve ser entendido como algo absoluto, certo, imutável.

Quando se diz por exemplo que a vida do pion é da ordem de 10^{-8}s, isto significa que, tendo-se agora uma coleção de pions, a maior parte dêles terá decaído dentro de 10^{-8}s.

Pois bem, o neutron - fora do núcleo - decai em um proton, um eletron e um antineutrino:

$$n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}$$

O que é que causa o decaimento do neutron, do pion...e de quase tôdas as partículas?

É a interação chamada <u>interação fraca</u>.

Essa interação é ainda muito mal conhecida.

Ela é hoje, muito mais "misteriosa" que a interação nuclear.

Mas uma das coisas que se conhecem a seu respeito é que ela é muito mais fraca que a interação nuclear.

Talvez 10^{14} vêzes mais fraca.

Daí seu nome.

XIII-7-2-5 Comparação entre as interações fundamentais.

A interação nuclear é a mais forte das quatro interações.

A seguir vem a interação eletromagnética. Da ordem de 10^2 vêzesmais fraca.

Segue a interação fraca: 10^{12} vêzes menos intensa que a interação nuclear.

E finalmente a interação gravitacional: 10^{37} vêzes mais fraca!

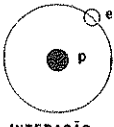
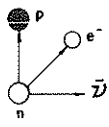
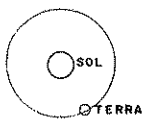
A Fig. XIII-43 resume tudo isso (*):

INTERAÇÃO	Nuclear	Eletromagnética	Fraca	Gravitacional
INTENSIDADE RELATIVA	1	10^{-2}	10^{-14}	10^{-37}
EXEMPLO	p n INTERAÇÃO ENTRE NUCLEONS	e⁻ p INTERAÇÃO PROTON - ELETRON NO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO	p e⁻ $\bar{\nu}$ n DECAIMENTO DO NEUTRON	SOL TERRA SISTEMA SOLAR

Figura XIII-43

XIII-8 Superposição de interações.

Na maioria dos casos reais, o corpo ou a partícula em estudo interagem com vários outros corpos ou partículas.

Qual é então a regra do jôgo?

(*) D.A. Bromley, "The Nucleus Today", The Physics Teacher 2, 260 (1964).

XIII-8-1 O Princípio da Superposição.

Sigamos juntos, atentamente, a história contada pela Fig. XIII-45.

Uma partícula tem no instante t o momentum $\vec{p}$.

Duas fôrças de interação agem sôbre a partícula: as fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ (Fig. XIII-45a)

Se a fôrça $\vec{F}_1$ agisse sòzinha, a variação do momentum no intervalo Δt seria $\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_1\Delta t$.

$\Delta\vec{p}_1$ é paralelo a $\vec{F}_1$ e de mesmo sentido. (Fig. XIII-45b).

Se a fôrça $\vec{F}_2$ agisse sòzinha, a variação do momentum no intervalo Δt seria $\Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_2\Delta t$.

$\Delta\vec{p}_2$ é paralelo a $\vec{F}_2$ e de mesmo sentido. (Fig. XIII-45c).

Pois bem. Deixemos as fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agirem juntas.

O efeito será a superposição dos efeitos que cada uma das fôrças teria se agisse sòzinha. Isto é, a variação $\Delta\vec{p}$ do momentum provocado pela superposição das fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ será a soma vetorial de $\Delta\vec{p}_1$ e $\Delta\vec{p}_2$.

Ora, $\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_1\Delta t$ e $\Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_2\Delta t$.

Então $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\Delta t$.

Ou seja $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ (XIII-11) em que $\vec{F}$ é a resultante das fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$: é realmente a fôrça que, se agisse sòzinha, teria o mesmo efeito que as fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agindo juntas.

Você observa pela equação (XIII-11) que $\Delta\vec{p}$ e $\vec{F}$ têm mesma direção e mesmo sentido, como se deve.

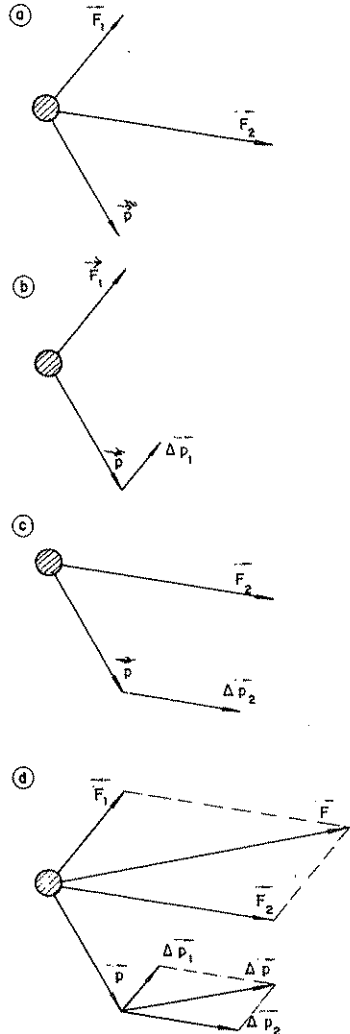



Figura XIII-45

Nada disso é, no fundo, extraordinário. É uma consequência inelutável:

1º) do caráter vetorial da fôrça. Duas (ou mais) fôrças aplicadas simultâneamente a uma partícula somam-se vetorialmente.

2º) do caráter linear da Segunda Lei de Newton. Ou seja, do fato sôbre o qual nunca insistirei demais (...e que o Martins me perdoe!): $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$.

A variação de momentum é proporcional à fôrça que a provoca.

De modo que o chamado "Princípio de Superposição" só é Princípio de nome.

O que não retira nada a sua importância.

Eis porque vamos enunciá-lo de novo, juntos.

Se uma partícula interage simultâneamente com várias outras, a taxa de variação do momentum da partícula, medida em um referencial inercial, é a mesma que a que seria produzida pela resultante de tôdas as fôrças de interação agindo sòzinha.

A Segunda Lei de Newton generaliza-se assim na forma

$$\vec{F}_{result.} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\text{ou} \quad \vec{F}_{result.} = m\vec{a} \qquad \text{(XIII-12)}$$

XIII-8-2 Um exemplo e uma regra importante.

Estudemos juntos, você e eu, um dos casos mais simples de intera - ções múltiplas.

Uma partícula desce ao longo de um plano inclinado sem atrito.

Ou melhor: com atrito desprezível.

Qual é o movimento da partícula?

Bem, a primeira coisa a fazer é perguntar: "nessa história, com quem é que a partícula está conversando?"

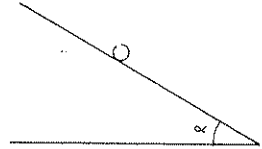



Figura XIII-44

Você já sabe que ela está com certeza "conversando" com a Terra. De modo que há primeiro a interação gravitacional. A Terra exerce sôbre a partícula uma fôrça que já convimos chamar seu <u>pêso</u>.

Sendo <u>m</u> a massa da partícula, êsse pêso é $m\vec{g}$.

Para não esquecer, eu represento a partícula na Fig. XIII-45 com a fôrça $m\vec{g}$, vertical e para baixo evidentemente. Não é a história tôda, mas é um comêço!

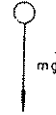



Figura XIII-45

Com quem mais a partícula está conversando? Heim?

Então você já entendeu: a partícula está conversando com os átomos ou as moléculas, ou os íons, do plano inclinado.

A Fig. XIII-46 é um modêlo muito ingênuo da situação.

Mas serve por enquanto.

Um átomo P da partícula está interagindo com os átomos A-B-C-D-E do plano.

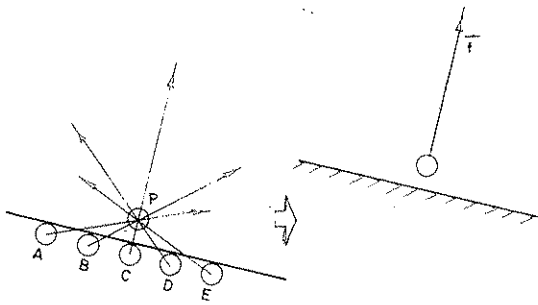



Figura XIII-46

Não haver atrito significa que não há, na interação partícula-plano, nenhuma relação entre as fôrças de interação e a velocidade da partícula.

Como a partícula tem sua velocidade paralela ao plano, não haver atrito significa simplesmente que a resultante $\vec{f}$ das fôrças de interação não tem componente paralela ao plano: essa fôrça resultante é pois perpendicular ao plano.

Duas observações:

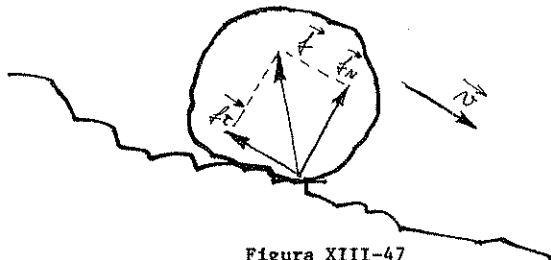
1) Pelo fato que duas superfícies em contato admitem, no ponto de contato, o mesmo plano tangente, a resultante das fôrças de interação é perpendicular a ambas as superfícies.

   Aquí: ao plano e à superfície da partícula.

2) O fato que $\vec{F}$ seja perpendicular ao plano exige uma simetria das interações em relação à normal ao plano no ponto de contato.

   A Fig. XIII-46 sugere essa simetria. Estude-a.

Na realidade a situação da Fig. XIII-46 é simplório demais.
Há sempre irregularidades, em qualquer superfície.
A Fig. XIII-47 mostra isso, exagerando agora em sentido contrário.

Figura XIII-47

Mas ela mostra como nascem as fôrças de atrito. A partícula está esbarrando contra uma saliência do plano. A resultante $\vec{f}$ das fôrças de interação tem agora uma componente $\vec{f}_T$ paralela ao plano e de sentido contrário à velocidade $\vec{v}$ da partícula.

$\vec{f}_T$ é a fôrça de atrito que age sôbre a partícula.

As fôrças de atrito podem ser grandemente reduzidas lubrificando-se as superfícies em contato.

Muito bem. Por enquanto estudaremos situações simples em que as fôrças de atrito serão tão pequenas em comparação com as outras fôrças em presença que elas poderão quase sempre ser desprezadas...

E nêsse caso as fôrças de contato serão sempre peppendiculares às superfícies em contato.

Isso é a regra importante anunciada no início dessa seção.

Voltemos então à nossa partícula sôbre o plano inclinado.

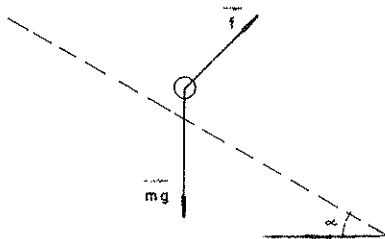



Figura XIII-47

Temos agora as duas fôrças que agem sôbre a partícula:

- o pêso $m\vec{g}$.
- a fôrça de contato $\vec{f}$ perpendicular ao plano.

A partícula está assim "isolada". Já vimos no Capítulo IX, ao estudarmos a Estática da partícula que isso significa representar a partícula sòzinha, substituindo os corpos com que ela interage pelas fôrças de interação.

No nosso exemplo o pêso $m\vec{g}$ substitui a Terra nêsse sentido que o papel da Terra é tão sòmente exercer a fôrça $m\vec{g}$.

E do mesmo modo a fôrça $\vec{f}$, do ponto de vista da partícula, substitui o plano.

Lembra-se? Queremos a Cinemática da partícula no referencial do Laboratório.

Depois de isolar a partícula, o próximo passo é achar a resultante das fôrças aplicadas.

Você dirá: mas como? Ainda não conhecemos o módulo de $\vec{f}$!

A situação não é tão dramática assim.

Porque sabemos que a trajetória da partícula é retilínea e paralela ao plano.

Consequentemente a aceleração da partícula é paralela ao plano.

E sendo a aceleração paralela ao plano, a fôrça resultante é necessàriamente paralela ao plano pela Segunda Lei!

Figura XIII-48

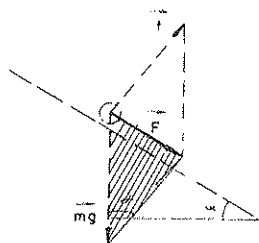
Você me dizia há pouco: "não conhecemos ainda o módulo de $\vec{f}$."

Eu respondo: o módulo de $\vec{f}$ é justo suficiente para tornar a resultante de $\vec{f}$ e $m\vec{g}$ paralela ao plano.

Veja então o triângulo sombreado da Fig. XIII-48. Imediatamente:

$$F = mg \operatorname{sen}\alpha \qquad \text{(XIII-13)}$$

Ora, sendo $\underline{a}$ a aceleração escalar da partícula e desde que estamos em um referencial inercial, a Segunda Lei nos diz que

$$F = ma \qquad \text{(XIII-14)}$$

A comparação de (XIII-13) e (XIII-14) fornece:

$$a = g \, \text{sen}\alpha \qquad \text{(XIII-15)}$$

Conclusão: o movimento da partícula ao longo do plano é um movimento retilíneo uniformemente variado, com aceleração g senα.

E isso basta para conhecermos a Cinemática da partícula. Não acha?

XIII-8-3 Outro exemplo e outra regra importante.

A Fig. XIII-49 fala por si só.

Um disco está amarrado ao centro da mesa de ar por um fio de nylon, e gira com movimento circular uniforme.

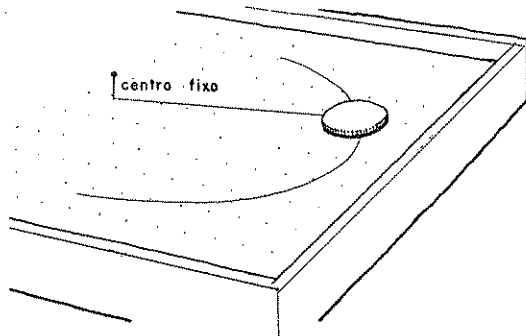



Figura XIII-49

Representemos por $\underline{m}$ a massa do disco, por $\underline{R}$ o comprimento do fio, por $\underline{\omega}$ a velocidade angular de rotação.

Qual é a tensão do fio?

Você se lembra que no Capítulo IX (seção IX-7-5) descobrimos que a tensão de um fio caracteriza o estado mecânico do fio, provocado por trações exercidas sôbre as extremidades.

Isolemos o disco. Para tanto, temos que suprimir a Terra, a mesa... e cortar o fio.

Cortar onde?

Em outros têrmos, se eu peço a tensão do fio, de que tensão estou falando?

Tensão em que ponto?

Ou a tensão é a mesma em todos os pontos?

Em um fio real, a tensão varia de ponto em ponto.

Para que isto fique claro, tomemos um exemplo muito simples: uma corda está pendurada ao teto do Laboratório. (Fig. XIII-50).

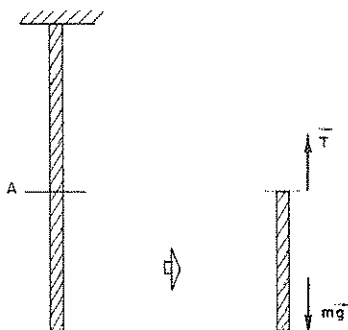



Figura XIII-50

Eu quero a tensão em A.

Corto (pelo pensamento) a corda em A, e isolo o pedaço de baixo.

Agem:

- o pêso $m\vec{g}$ do pedaço isolado, pêso êsse que depende òbviamente do comprimento do pedaço cortado, e conseqüentemente da posição de A;
- a tração $\vec{T}$ exercida pela parte superior da corda.

Havendo equilíbrio estático:

$$\vec{T} = - m\vec{g}$$

A tensão em A é medida pelo módulo da tração $\vec{T}$:

$$T = mg$$

Essa tensão depende de m; depende pois do ponto em que calculamos.

Isto era fìsicamente óbvio: lá em cima, perto do teto, uma seção da corda tem que sustentar o pêso todo. A tensão é evidentemente maior que na parte inferior, onde a fração do pêso sustentado é quase nula.

Mas se a massa da corda fôr desprezível em comparação com as outras massas em presença, então a tensão é a mesma em todos os pontos!

No exemplo da corda suspensa, se a massa fôr desprezível, a tensão é pràticamente nula ao longo da corda tôda.

E no caso geral o resultado é o mesmo.

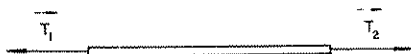
Veja a Fig. XIII-51. Eu isolei um pedaço de fio que faz parte de um sistema, e êsse fio tem uma aceleração qualquer $\vec{a}$.

$\vec{T}_1$ $\vec{T}_2$

Figura XIII-51

As trações $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ são exercidas nas extremidades do pedaço pelo resto do sistema (o que foi suprimido).

Pelo Princípio de Superposição a 2a. Lei se escreve:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$$

onde m é a massa do pedaço de fio...

...Mas espere! Não é desprezível, por hipótese, a massa do fio?

E se m = 0... $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$, o que prova que as tensões T_1 e T_2 nas extremidades são iguais.

Voltemos agora a nosso problema.

Já sabemos que podemos cortar o fio onde quisermos: sendo uniforme a tensão, êle transmite integralmente as trações, onde quer que você as exerça.

Sem tirar nem pôr.

A Fig. XIII-52 mostra o disco isolado.

O pêso $m\vec{g}$ é equilibrado pela ação $\vec{F}$ exercida pela mesa (ou melhor, pelo côlchão de ar).

De modo que a resultante de tôdas as fôrças exercidas sôbre o disco é a tração do fio $\vec{T}$, em direção do centro fixo, claro.

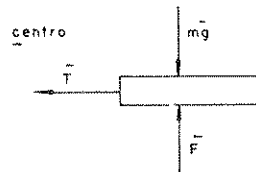



Figura XIII-52

Ora, o Capítulo VII nos ensinou que a aceleração centrípeta em um movimento circular uniforme é, em módulo, igual a...

...igual a $\omega^2 R$, não é mesmo?

E que essa aceleração é centrípeta.

O que é que produz essa aceleração, heim?

A fôrça resultante sôbre o disco, ou seja $\vec{T}$!

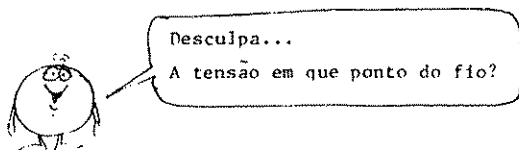
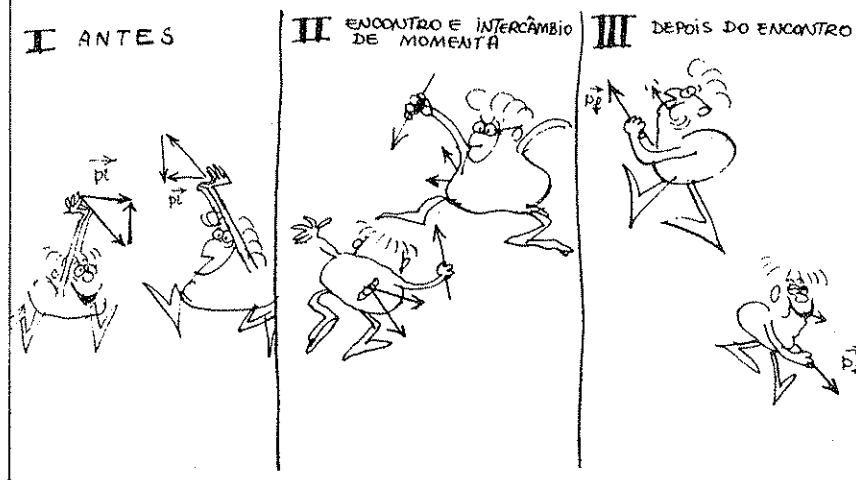
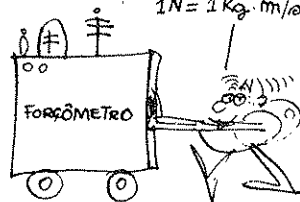
Ora, a direção e o sentido da fôrça e da aceleração já estão de acôrdo.

Só faltam os módulos.

Escrevamos pois a 2a. Lei em módulo: $T = m\omega^2 R$.

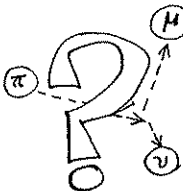
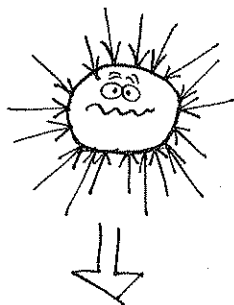
E temos assim a tensão do fio.

Desculpa...
A tensão em que ponto do fio?

DÁ PRA RESUMIR TUDO ISSO?
EXCELENTE IDÉIA MARTINS! VAMOS LÁ!

UMA INTERAÇÃO É CARACTERIZADA POR UMA TROCA DE MOMENTUM ENTRE DUAS PARTÍCULAS QUE INTERAGEM.
I ANTES
II ENCONTRO E INTERCÂMBIO DE MOMENTA
III DEPOIS DO ENCONTRO
pi
pi
pf
pf

AS FÔRÇAS DE INTERAÇÃO ENTRE DUAS PARTÍCULAS, EM UM REFERENCIAL INERCIAL, CONSTITUEM SEMPRE UM PAR DE FÔRÇAS DIRETAMENTE OPOSTAS. É A TERCEIRA LEI DE NEWTON. AÇÃO E REAÇÃO EXERCEM-SE SEMPRE SÔBRE PARTÍCULAS DIFERENTES.

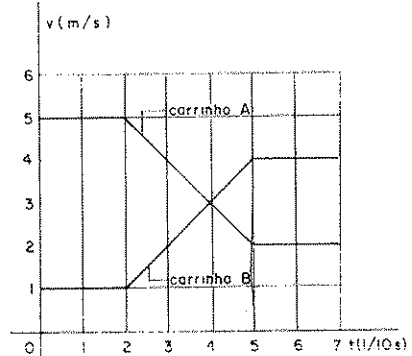
NO INTERVALO Δt O MOMENTUM TRANSFERIDO PARA UMA PARTÍCULA, NO DECORRER DE UMA INTERAÇÃO ESTUDADA, EM UM REFERENCIAL INERCIAL, MEDE-SE PELO IMPULSO $\vec{F}\Delta t$ DA FÔRÇA DE INTERAÇÃO QUE AGE SÔBRE A PARTÍCULA:
$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$

CERTAS INTERAÇÕES TEM UMA DURAÇÃO TÃO BREVE QUE É MUITO DIFÍCIL SABER EXATAMENTE COMO SÃO AS FÔRÇAS DE INTERAÇÃO. ESSAS INTERAÇÕES SÃO CARACTERIZADAS POR FÔRÇAS CHAMADAS IMPULSIVAS. CONHECENDO-SE NO ENTANTO A VARIAÇÃO DO MOMENTUM $\Delta\vec{p}$ E A DURAÇÃO Δt DA INTERAÇÃO, PODE-SE DETERMINAR O VALOR MÉDIO $\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ DA FÔRÇA.

SÒMENTE EXISTEM NA NATUREZA QUATRO INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS. POR ORDEM DE INTENSIDADE CRESCENTE SÃO ELAS:
π
μ
ν
A INTERAÇÃO GRAVITACIONAL
A INTERAÇÃO FRACA
A INTERAÇÃO ELETROMAGNÉTICA
A INTERAÇÃO NUCLEAR

SE UMA PARTÍCULA INTERAGE COM VÁRIAS OUTRAS, CADA UMA SE COMPORTA COMO SE AGISSE SÒZINHA. ISTO É, SUA ATUAÇÃO NÃO É INFLUENCIADA PELA PRESENÇA DAS OUTRAS. EM CONSEQUÊNCIA, O CONJUNTO DAS FÔRÇAS DE INTERAÇÕES PODE SER SUBSTITUÍDO PELA SUA SOMA VETORIAL: A RESULTANTE DO SISTEMA. A SEGUNDA LEI ESCREVE-SE ENTÃO:
$\vec{F}_{result.} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ OU $\vec{F}_{result.} = m\vec{a}$
(EM UM REFERENCIAL INERCIAL!)
$\vec{F}$

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas "estrelados" (*) devem ser discutidos em aula com seu Profes - sor).

XIII-1 A figura representa, esquematizados, os gráficos v vs t da interação unidimensional de dois carrinhos, no Laboratório. A massa do carrinho A é 0,30kg.

1) Qual é a massa do carrinho B?

2) Construa os gráficos p vs t da interação?
3) Quais são os instantes em que começou e em que terminou a interação?
4) Qual foi a variação de momentum de cada carrinho durante a interação?
5) Qual foi a taxa média de variação do momentum do carrinho A durante a interação?
6) Qual era a taxa de variação instantânea do momentum do carrinho A em t = 0,30s? em t = 0,40s?
7) Qual é a fôrça de interação que age sôbre o carrinho A? Qual é a fôrça de interação que age sôbre o carrinho B?

*XIII-2 Voltemos juntos aos gráficos v vs t da Fig. XIII-3. Lembre-se que, conforme mostra a Fig. XIII-1, o carrinho B anda na frente, e o carrinho A atrás. Mostre que efetivamente, em t = 7,7 ($\frac{1}{5}$ s), a distância entre os carrinhos é mínima, e que ela é máxima em t = 17,7 ($\frac{1}{5}$ s).

*XIII-3 Compare os gráficos v vs t da Fig. XIII-3 com os gráficos p vs t da Fig. XIII-4.

1) Observe que as curvas v vs t admitem pontos de inflexão (*) nos pontos em que se encontram; isto é, em t = 7,7 ($\frac{1}{5}$ s) e t = = 17,7 ($\frac{1}{5}$ s).

Explique fìsicamente isso.

2) Observe agora que as curvas p vs t se encontram em t = 9,1 ($\frac{1}{5}$ s) e t = 17,2 ($\frac{1}{5}$ s); êsses instantes são diferentes dos instantes correspondentes aos pontos de encontro das curvas v vs t.

Explique a razão disso.

3) Em que instantes se acham os pontos de inflexão dos gráficos p vs t?

XIII-4 Suponha que, nos gráficos da Fig. XIII-4, a escala vertical esteja graduada em kg.m/s (em vez de unidades arbitrárias). Observe bem o que eixo dos tempos está graduado em $\frac{1}{5}$ s.

Qual seria então o valor máximo da fôrça de interação entre os carrinhos?

XIII-5 Suponha que durante uma interação unidimensional o gráfico p vs t de uma partícula seja um segmento de reta. (O referencial é inercial).

O que você conclui quanto à fôrça de interação que age sôbre a partícula?

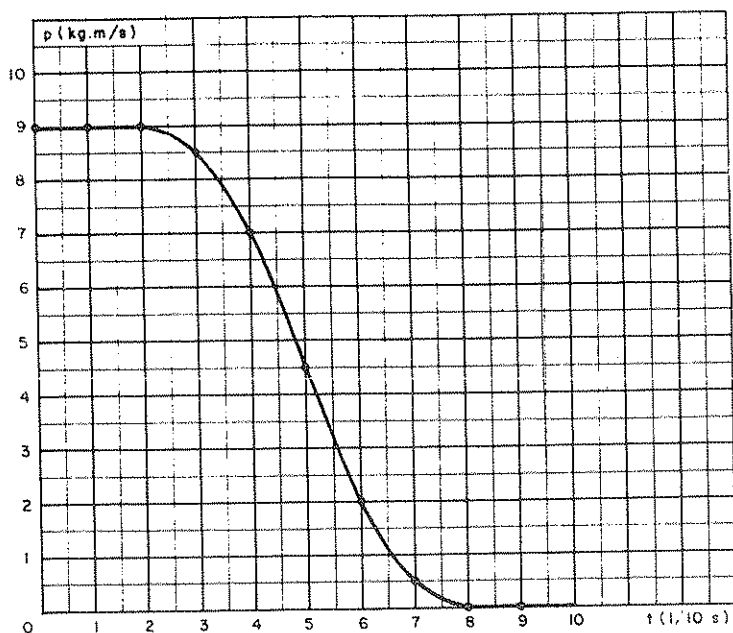
*XIII-6 A Figura a seguir representa o gráfico p vs t do movimento de uma partícula. Entre os instantes t = 0,20s e t = 0,80s, a partícula interage unidimensionalmente com outra.

No final da interação, a partícula está parada no Laboratório.

(*) Eu lembro que em um ponto de inflexão, a tangente atravessa a curva. Isso significa que a concavidade da curva muda de sentido. Veja o exemplo abaixo:

1) Qual foi a fôrça média exercida sôbre a partícula durante a interação?

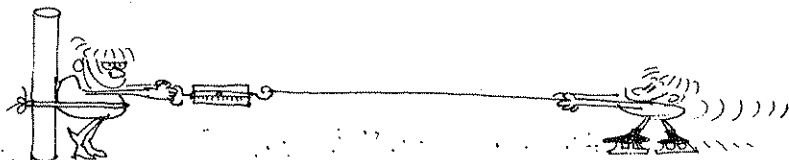
2) Qual era a fôrça exercida em t = 0,40s?

3) Qual foi o módulo da fôrça máxima exercida sôbre a partícula?

XIII-7 Em determinado instante no decorrer de uma interação, o módulo da aceleração de uma partícula era $3{,}0 m/s^2$. A massa da partícula é 0,20 kg. Qual era o módulo da fôrça de interação naquêle instante?

XIII-8 A massa de um Volkswagen é $6{,}0 \times 10^2$kg. Qual é a fôrça exercida quando o carro tem aceleração de $4{,}0 m/s^2$?

XIII-9 No ringue de patinação sôbre gêlo, o Martins está puxando o irmãozinho com uma corda. Um dinamômetro (≡ "forçômetro") indica que a tensão da

corda é $2,0 \times 10^2$N. A massa do irmãozinho é 40kg.

Qual é a sua aceleração?

XIII-10 Qual é o pêso de um livro cuja massa é 0,80kg?

*XIII-11 No Capítulo X, discutimos a evidência experimental da proporcionalidade entre massa inercial e massa gravitacional e vimos que a escôlha da mesma unidade para essas duas massas torná-as numèricamente idênticas.

Aprendemos também que Einstein foi mais longe e postulou que elas são conceitualmente idênticas.

Muito bem! Suponha que numa Metagaláxia (invento dos autores de ficção científica), a evidência experimental mostre que a massa inercial é proporcional ao <u>cubo</u> da massa gravitacional. A Segunda Lei de Newton aplica-se no entanto na Metagaláxia.

1) Naquêle universo de fantasia, todos os corpos cairiam com a mesma aceleração, no vácuo, (em um campo gravitacional uniforme)?
2) Se você acha que não, quais seriam as acelerações comparadas de duas "pedras" cujas massas gravitacionais fôssem respectivamente 1kg e 2kg?

XIII-12 Será que todos os corpos caem com a mesma aceleração na superfície da Lua?

XIII-13 Na calha de ar, um carrinho de 400g está sendo puxado por uma mola (Fig. 1). O comprimento da mola relaxada é 30cm.

Quando o comprimento da mola é 32cm, a aceleração do carrinho é 1,0

m/s^2.

Suponha que se associem em paralelo duas molas idênticas à primeira (Fig. 2).

Qual seria a aceleração do carrinho se ambas as molas tivessem 32cm de comprimento?

Fig 1

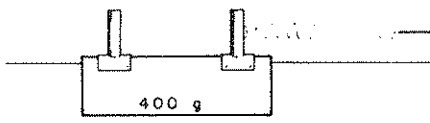
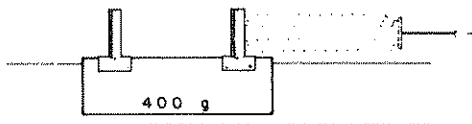
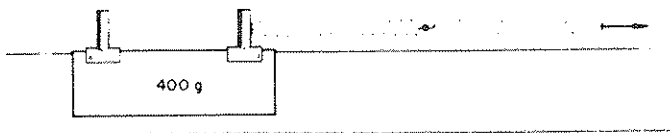



Fig. 2

XIII-14 Voltemos à experiência do problema precedente.

Suponha que as duas molas sejam ligadas em série, como mostra a figura.

Sendo de 32cm o comprimento de cada uma das molas, qual será a aceleração do carrinho?

*XIII-15 Continuemos brincando com carrinhos na calha de ar. Temos agora dois carrinhos A e B, cujas massas respectivas são 400g e 600g, unidos por um fio de nylon.

Uma mola amarrada ao carrinho B está puxando o conjunto. Essa mola é idêntica à que foi utilizada no problema XIII-13.

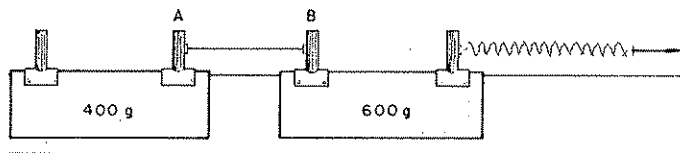
1) A mola estando de novo esticada até um comprimento total de 32cm, qual é a aceleração do conjunto?

2) Em determinado instante, queima-se o fio de nylon (essa operação não tem outro efeito que de tornar independentes os dois carrinhos).

Quais são as acelerações dos dois carrinhos a partir dêsse instante? (O estado da mola permanece o mesmo).

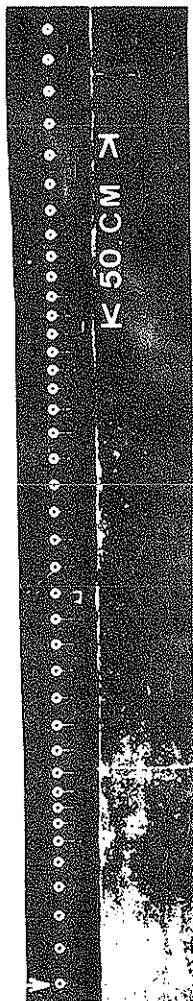
3) Construa os gráficos v vs t dos dois carrinhos correspondentes à experiência tôda, supondo-se que o fio foi queimado 0,50s depois do início do movimento. Prolongue os gráficos até t = 1,0s.

4) O comprimento do fio de nylon era 20cm.

Qual é a distância entre os dois carrinhos em t = 1,0s?

XIII-16 A fotografia a seguir, representa o registro estroboscópico do movimento de um carrinho na calha de ar.

As fotografias foram tomadas com intervalos de $\frac{1}{10}$ s. Repare também a escala de comprimentos na parte direita do clichê.

Tome como origem dos tempos o instante correspondente à primeira posição à esquerda, assinalada por uma seta.

50 CM

1) Construa o gráfico v vs t do movimento.
2) Qual era a aceleração do carrinho em t = 1,0s?
3) A massa do carrinho é 0,40kg. Qual era a fôrça aplicada ao carrinho em t = 1,0s?
4) Em que outros instantes a fôrça aplicada foi igual à precedente?
5) Há um intervalo em que a fôrça aplicada foi pràticamente constante. Qual é? Qual foi a fôrça aplicada nêsse intervalo?
6) Em que instante a fôrça aplicada foi nula?
7) Em que intervalos a fôrça aplicada teve o sentido do movimento? sentido contrário?

XIII-17 Uma fôrça constante de 0,20N age sôbre um carrinho de massa igual a 0,40kg, sôbre a calha de ar.

1) Partindo do repouso de uma extremidade da calha, quanto tempo levará o carrinho para percorrer o comprimento da calha, igual a 2,0m?
2) Com que velocidade chegará êle à outra extremidade?

XIII-18 Experiências na calha de ar:

A) um carrinho de 600g anda com velocidade constante de 0,20m/s. Aplicando-lhe uma fôrça constante, no sentido e na direção da velocidade inicial, durante um intervalo de 0,20s, a sua velocidade passa a ter o valor de 0,40m/s.
B) outro carrinho de 400g anda com velocidade constante de 0,90m/s, no mesmo sentido que o primeiro. Aplicando-lhe uma fôrça constante, em sentido oposto ao da velocidade, e durante o mesmo intervalo de 0,20s, a velocidade passa a ser de 0,60m/s.

Compare os módulos das duas fôrças aplicadas.

*XIII-19 O motor de um foguete queima $2,0 \times 10^2$kg de combustível por segundo, expelindo os gases da combustão para trás com uma velocidade de $3,0 \times 10^3$m/s em relação ao foguete.

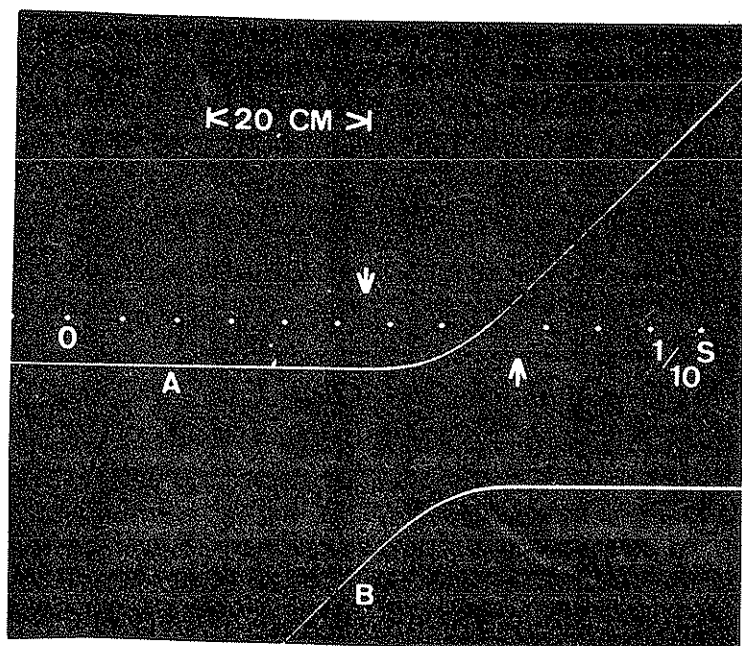
Qual é a fôrça exercida sôbre o foguete? (Despreze os campos gravitacionais por ventura existentes).

XIII-20 A fotografia representa os gráficos $\underset{\sim}{s}$ vs $\underset{\sim}{t}$ de uma interação unidimensional de dois carrinhos A e B na calha de ar.

O início e o final da interação são assinalados pelas duas setas.

A escala de comprimentos está representada na parte superior da fotografia.

O eixo dos tempos é graduado em $\frac{1}{10}$ s.

A massa do carrinho A é 0,40kg.

1) Qual é a massa do carrinho B?
2) Qual foi a variação do momentum do carrinho A durante a interação? Qual foi a variação do momentum do carrinho B?
3) Qual foi a fôrça de interação média sôbre o carrinho A? Sôbre o carrinho B?
4) Os carrinhos interagem por meio de uma mola. Em que instante foi máxima a fôrça de interação?

XIII-21 Voltemos ao Problema XIII-6, e concentremo-nos agora sôbre a <u>outra</u> partícula, isto é, sôbre a partícula que interagir com a daquêle Problema.

Essa outra partícula tinha, em t = 0,01s, um momentum igual a 2,0kg.m/s.

1) Qual era o seu momentum em t = 0,90s? Em t = 0,60s?
2) Qual era a fôrça exercida sôbre a partícula em t = 0,40s?

*XIII-22 Você lança uma pedra horizontalmente.

Faça algumas experiências, avalie os valores dos parâmetros relevantes do problema, e me diga qual é valor da fôrça média exercida pela sua mão sôbre a pedra.

*XIII-23 Avalie a fôrça exercida pelo asfalto sôbre as rodas de um automóvel, andando à grande velocidade, e freiando bruscamente à vista de um obstáculo que surge repentinamente à sua frente.

XIII-24 O maquinista de um trem começa sempre a freiar a composição 500m antes da estação em que êle vai parar. No dia 15 de Junho a composição tinha 500 toneladas de massas (1 tonelada = 10^3kg) e andava a 60km/h. No dia 16, a massa do trem era 1000 toneladas e êle andava a 30km/h.

Compare as fôrças médias exercidas pelos freios nos dois casos.

XIII-25 Eu puxei um carrinho sôbre a calha de ar com um pedaço de linha de coser. A massa do carrinho era 0,60kg e eu consegui uma aceleração máxima de 3,0m/s^2. (Tentei conseguir mais, mas a linha rebentou).

Qual é a massa máxima que eu poderei suspender estàticamente à linha?

*XIII-26 Vamos fazer um trato com o pessoal da NASA que vai à Lua?

Muito bem. Êles instalaram lá na Lua um Laboratório de Física com uma calha de ar e carrinhos idênticos aos nossos.

1a. Série de experiências: Medimos na Terra, com uma balança de braços iguais, a massa de um carrinho, comparando-a com o quilograma-padrão. Achamos 0,60kg. Despachamos o carrinho e o padrão à Lua; êles medem a massa do carrinho com uma balança, comparando-a com o quilograma-padrão. Qual é a massa que êles acham?

2a. Série de experiências: Medimos a massa de um carrinho fazendo-o interagir com um outro cuja massa é igual à do quilograma-padrão. A análise dos gráficos s vs t ou v vs t fornece 0,40kg. Despachamos os dois carrinhos para a Lua. Êles fazem interagir os dois carrinhos na calha de ar e analisam os gráficos s vs t ou v vs t. Qual é a massa que êles acham?

3a. Série de experiências: Temos uma coleção de quilogramas-padrão. Confeccionamos um dinamômetro (≡ "forçômetro") com uma mola e calibramos o instrumento suspendendo sucessivamente um, dois, três... quilogramas padrão. Isso nos fornece as divisões 9,8N, 19,6N, 29,4N etc...

Mandamos os quilogramas-padrão e o dinamômetro para a Lua. Êles suspendem ao instrumento um quilograma-padrão. Qual é a indicação do instrumento? (O campo gravitacional na Lua é 1/6 do Campo Terrestre).

4a. Série de experiências: Os nossos colegas na Lua calibram um dinamômetro da maneira seguinte: êles utilizam o carrinho de 0,40kg na calha de ar, puxam o carrinho pelo dinamômetro e medem em cada experiência a aceleração do carrinho e o alongamento da mola. A 2a. Lei de Newton lhes fornece a fôrça aplicada.

Êles mandam para nós o dinamômetro assim calibrado. Suspendemos um quilograma-padrão ao instrumento. Qual é sua indicação?

5a. Série de experiências: Os nossos colegas na Lua calibram um dinamômetro da maneira seguinte: êles suspendem sucessivamente um, dois, três.. quilogramas-padrão e marcam no instrumento as divisões 1, 2, 3... respectiva-

mente. Êles mandam para nós o dinamômetro assim calibrado. Suspendemos um quilograma-padrão ao instrumento. Qual será sua indicação?

XIII-27 Avalie a fôrça exercida sôbre um carro que anda a alta velocidade e bate contra um poste.

*XIII-28 Você bate contra uma parede com duas bolas de mesma massa. A primeira é uma bola de tênis; a outra é uma bola de massa de vidraceiro. Ao bater contra a parede ambas as bolas têm a mesma velocidade, e elas interagem com a parede durante o mesmo intervalo de tempo.

Qual das duas bolas exerce a maior fôrça sôbre a parede?

XIII-29 Uma partícula isolada de massa 0,20kg tem velocidade

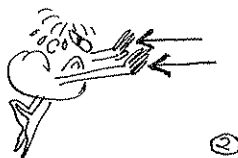
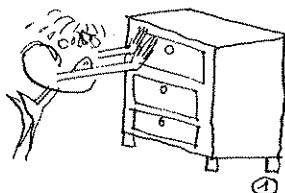
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4,0 \\ 2,0 \end{pmatrix} \quad (m/s),$$

medida em um referencial inercial. Em t = 0, aplica-se a essa partícula uma fôrça constante

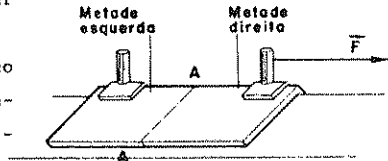
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 3,0 \end{pmatrix} \quad (N).$$

A fôrça age durante 0,20s.

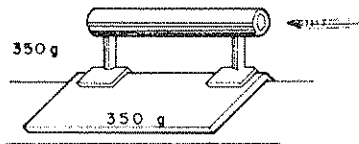
Qual é a velocidade da partícula em t = 0,30s?

XIII-30 O Martins está tentando empurrar um móvel. Mas não consegue movê-lo. (Fig. 1). No entanto, se o Martins exerce fôrças com ambas as mãos sôbre o móvel, êste exerce fôrças opostas sôbre as mãos do Martins, pela 3a. Lei. (Fig. 2). Por que é que essas fôrças não aceleram o Martins para trás?

*XIII-31 O Martins tem massa de 60kg. Qual é o pêso da Terra no campo gravitacional do Martins?

*XIII-32 Você puxa um carrinho na calha de ar com uma fôrça $\vec{F}$.

Imagine agora um plano geométrico que divide o carrinho ao meio no sentido longitudinal. O traço dêsse plano sôbre o carrinho é a linha AA da figura ao lado.

É óbvio que, ao longo dessa secção imaginária, a metade direita exerce uma fôrça sôbre a metade esquerda. (Senão, que razão teria a metade esquerda de seguir junta ao resto, heim?).

Como se compara essa fôrça com a fôrça $\vec{F}$?

*XIII-33 Vamos estudar juntos uma experiência que eu fiz com um carrinho na calha de ar e uma carabina de ar comprimido. O negócio foi o seguinte: fixei em cima do carrinho um tubo contendo massa de modelar. O carrinho assim preparado tinha massa de 350g, e estava parado no meio da calha.

Atirei no tubo contendo a massa com uma carabina de ar comprimido cujo projétil tinha massa de 1,00g. O carrinho pôs-se em movimento e uma análise estroboscópica me mostrou que a velocidade do carrinho era de 25,0cm/s.

Retirei depois o cilindro de massa contida no tubo e achei que o projétil tinha penetrado na massa de 10,0cm.

Eu queria saber duas coisas: a velocidade $\underline{v}$ do projétil por um lado, e a fôrça média $\underline{F}$ que êle exerceu sôbre o carrinho por outro lado.

Vamos então, juntos, organizar nosso plano de pesquiza.

1) No Laboratório o momentum inicial do projétil antes da interação com o carrinno era.............?
2) No Laboratório o momentum inicial do carrinho era..........?
3) No Laboratório o momentum final do conjunto carrinho + projétil era....... kg.m/s?

4) Pela conservação do momentum total do sistema podemos escrever que:

.... + ... = ...

5) E consequentemente a velocidade v do projétil antes da interação era...... m/s?

6) Transportemo-nos agora no RCM. A velocidade do RCM no Laboratório é....... m/s?

7) Antes da interação a velocidade v do carrinho no Laboratório era.......... m/s? E a velocidade V do projétil era.........m/s?

8) Construamos os gráficos v vs t da interação no RCM. Suporemos que durante a interação a fôrça de interação é constante e que, consequentemente, a aceleração do carrinho e a do projétil são.......? Representaremos por Δt (desconhecido) a duração da interação.

9) Durante a interação o carrinho andou de........Δt no RCM? E o projétil andou de...........Δt?

10) Como o projétil penetrou de 10cm no cilindro de massa, êsses 10cm são evidentemente iguais à soma dos dois espaços calculados acima, de modo que Δt = ...s?

11) A aceleração média do carrinho, durante a interação, foi...........m/s^2?

12) E consequentemente a fôrça média de interação foi..........N?

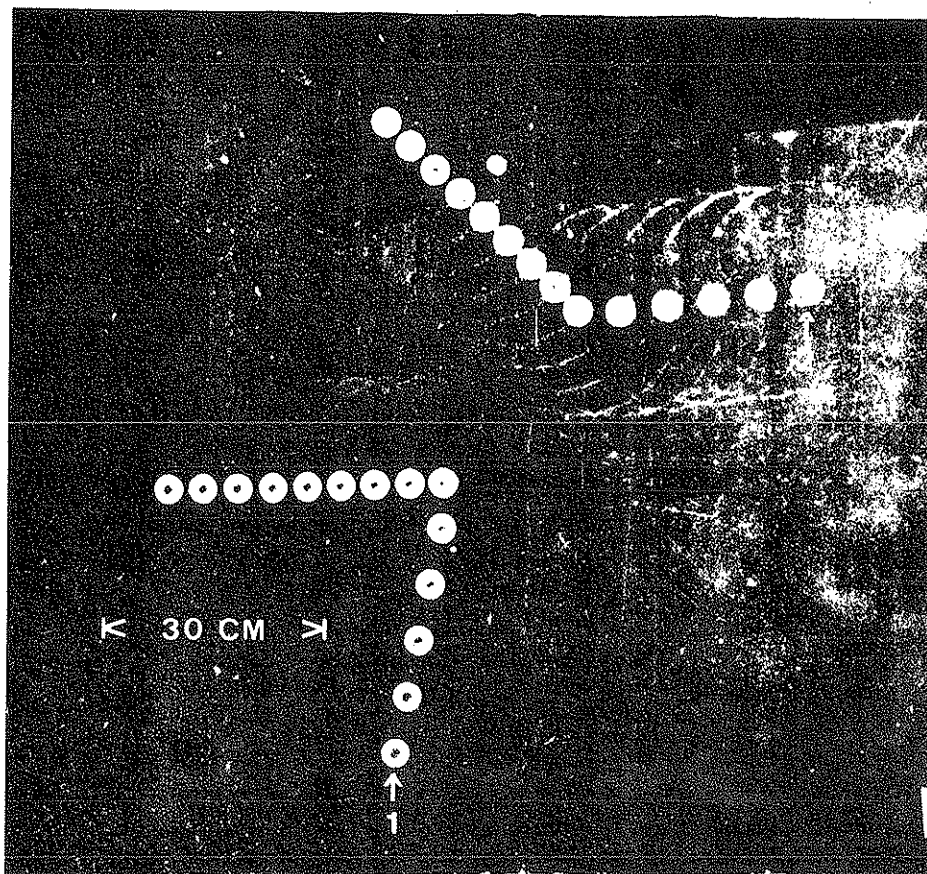
*XIII-34 A fotografia é o registro estroboscópico da colisão de duas "partículas" sôbre a mesa de ar.

No instante zero as duas partículas estavam nas posições indicadas pelas setas.

As fotografias sucessivas foram tomadas a intervalos de $\frac{1}{10}$ s.

1) Construa, a partir de um mesmo ponto, segmentos orientados representando respectivamente, numa escala arbitrária:

a) a velocidade $\vec{u}_1$ da partícula (1) antes da interação;
b) a velocidade $\vec{v}_1$ da partícula (1) depois da interação;
c) a velocidade $\vec{u}_2$ da partícula (2) antes da interação;
d) a velocidade $\vec{v}_2$ da partícula (2) depois da interação.

30 CM
1

2) Construa as variações $\Delta\vec{v}_1$ e $\Delta\vec{v}_2$ das velocidades das partículas (1) e (2) respectivamente durante a colisão.

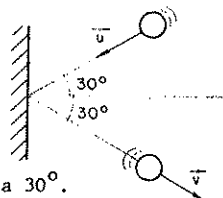
3) Sendo m_1 e m_2 as massas das duas partículas, o que pode dizer da soma

$$m_1\Delta\vec{v}_1 + m_2\Delta\vec{v}_2?$$

(Lembre-se do que você aprendeu no Capítulo XI!)

4) A massa da partícula (1) é 300g. Qual é a massa da partícula (2)?

5) Suponha que a interação entre as partículas durou $1,0 \times 10^{-2}$s. Qual foi a fôrça média de interação que agiu sôbre a partícula (1)? Sôbre a partícula (2)? A Terceira Lei é verificada?

XIII-35 Uma bola de tênis tem massa m = 60g. Movendo-se em um plano horizontal com velocidade $\vec{u}$ cujo módulo é igual a 10m/s, a bola bate contra uma parede e repica com velocidade $\vec{v}$ cujo módulo é igual ao de $\vec{u}$. Os ângulos da trajetória incidente e da trajetória refletida com a normal no ponto de contato são iguais a 30°.

1) Construa com uma escala arbitrária a variação $\Delta\vec{v}$ da velocidade durante a colisão com a parede. Especifique bem o referencial inercial em que você está calculando!

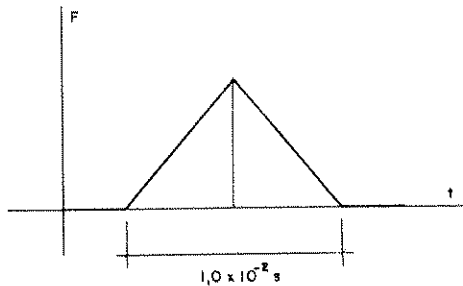
Qual é a direção de $\Delta\vec{v}$? Qual é o seu módulo?

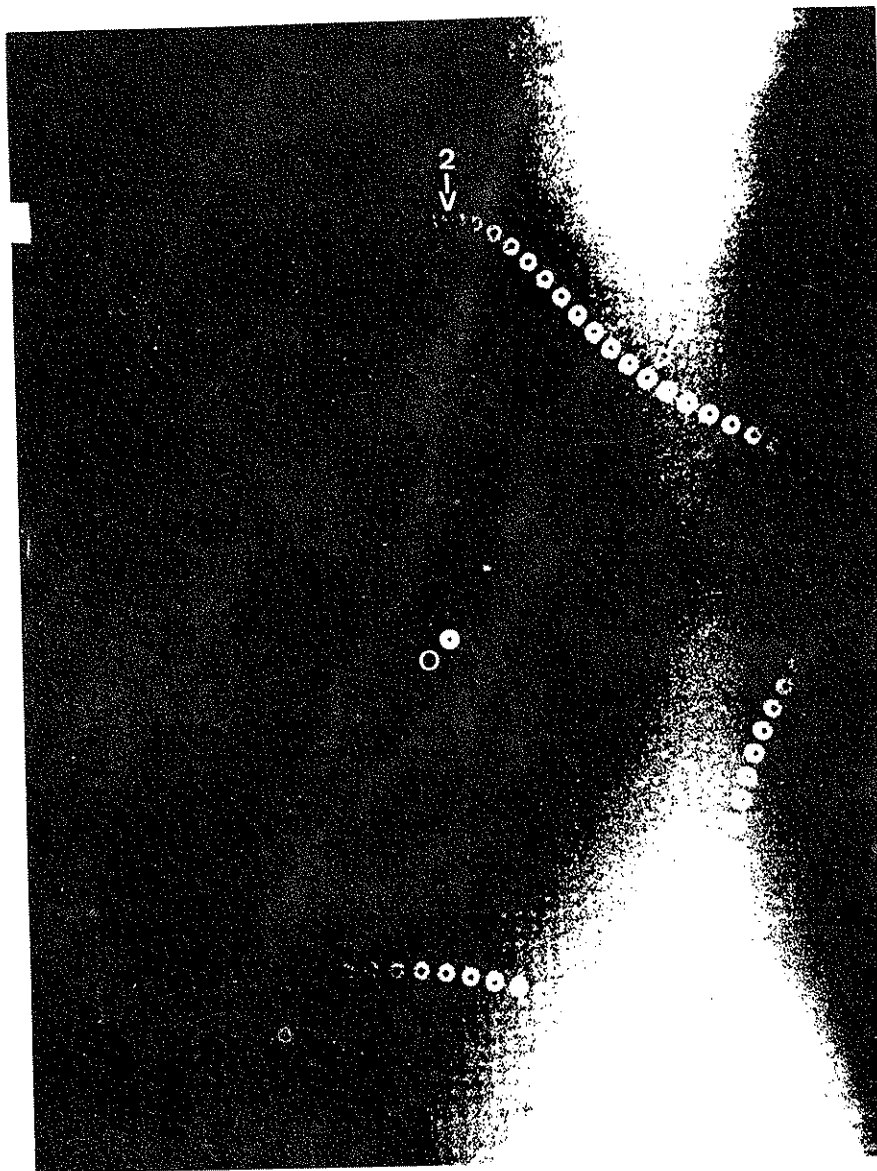
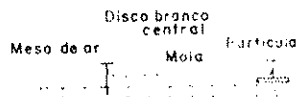
2) A interação bola-parede dura $1,0 \times 10^{-2}$s. Qual é a fôrça média exercida pela parede sôbre a bola durante o choque?

XIII-36 Avalie a fôrça média exercida sôbre a bola pela chuteira do Gerson ao bater um pênalty.

*XIII-37 A figura a seguir, representa esquemàticamente a fôrça (módulo) que uma raquete de tênis exerce sôbre uma bola de massa m = 60g, em função do tempo.

A bola incidiu perpendicularmente ao plano da raquete com velocidade de 10m/s e repicou com a mesma velocidade.

O tempo de contato foi 1,0 x 10^{-2}s.
Qual foi o valor máximo da fôrça?

*XIII-38 A fotografia na página a seguir, representa o registro estroboscópico do movimento de uma " partícula" sôbre a mesa de ar.

2
O

Você observa no centro um disco branco O. Isso representa o ponto da mesa em que a extremidade de uma mola estava prêsa, podendo no entanto girar livremente.

A outra extremidade da mola estava prêsa na partícula.

Disco branco central
Mesa de ar
Mola
Partícula

A interação se processava consequentemente entre a partícula e a Terra, por intermédio da mola, e a fôrça de interação exercida sôbre a partícula era <u>central</u>. Isso significa que o seu suporte passava sempre por O.

Você já se representa o movimento?

A partícula gira em tôrno de O, e ao mesmo tempo oscila na extremidade da mola.

Certo?

Acho que nesta interação podemos considerar a Terra como inercial, e estudar o problema no Laboratório. É o que fêz a câmera.

Observe que no ponto (1) o comprimento da mola é mínimo, enquanto que na posição (2) ela está distendida ao máximo.

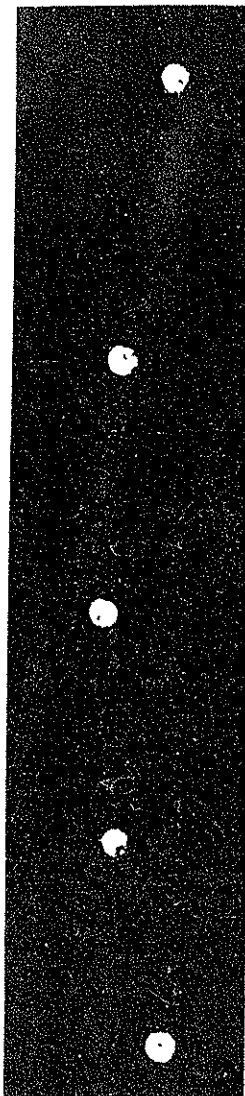
1) Sòmente ao observar a trajetória, deduza o <u>sentido</u> da fôrça de interação na vizinhança do ponto (1) e na vizinhança do ponto (2).

2) Em que ponto do arco (1-2) é nula a fôrça de interação?

*XIII-39 Voltemos à fotografia XIII-15, que representa o movimento de um projétil, e à Fig. XIII-16 que reproduz as posições sucessivas da bola. Mostre que a velocidade na posição 4 (por exemplo), é paralela ao segmento 35.

(Sugestão: No Capítulo VIII, Seção VIII-2-9, aprendemos a determinar a direção da velocidade no ponto da trajetória que corresponde à flecha do projétil. Pense dois segundos e você vai ver que o problema é <u>idêntico</u>).

XIII-40 A fotografia representa cinco posições da trajetória de uma bola. Infelizmente estraguei o negativo e não tenho a posição da rampa de lançamento, nem a direção da vertical.

Você não poderia me ajudar a descobrir, pelo menos, essa direção?

Probl. XIII-40

*XIII-41 Olhe de novo para a fotografia da Fig. XIII-15, ou para qualquer outro registro do movimento de um projétil (...ou aliás para o registro de qualquer movimento de qualquer partícula).

Objetivamente, você pode estar seguro que o movimento se processou da esquerda para a direita, e de cima para baixo, e não da direita para a esquerda, e de baixo para cima?

XIII-42 Nuna conversa que eu tive com Martins, no Capítulo X, eu lhe disse que a interação gravitacional não serve para comparar as massas inerciais dos corpos.

Já que você conhece a lei de fôrça pela expressão (XIII-9), explique ao Martins o que eu queria dizer-lhe naquela oportunidade.

*XIII-43 Amarre sòlidamente uma pedra a uma corda resistente e faça-a girar em um plano horizontal, por cima da sua cabeça.

O raio da trajetória da pedra é 1,0m, e o período do movimento é 0,5s.

1) Quais são as fôrças que agem sôbre a pedra?
2) As condições da experiência são tais que o pêso da pedra pode ser desprezado com bôa aproximação. Convença-se disso.
3) Qual é o valor da tensão da corda? Suponha que a massa da pedra seja 0,20kg.

XIII-44 Seu carro está fazendo uma curva sôbre uma estrada horizontal.

Escôlha você mesmo valores numéricos para os parâmetros relevantes e dê uma ordem de grandeza da fôrça horizontal exercida pela estrada sôbre o carro.

*XIII-45 Outra experiência na calha de ar. Observe a figura a seguir: o carrinho está sendo puxado por um fio de nylon que passa sôbre uma polia e sustenta uma massa m = 0,050kg.

O problema é achar a aceleração do carrinho (que é evidentemente igual à da massa m).

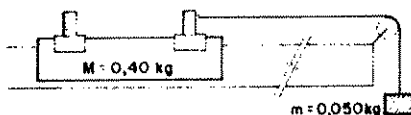
1º) Isole o carrinho, "cortando" o fio. Você tem que substituí-lo

pela fôrça $\vec{T}$ que êle exerce sôbre o carrinho. (Lembre-se que a calha sustenta o carrinho, equilibrando o seu pêso: podemos pois ignorar as interações do carrinho com a Terra por um lado, e com a calha pelo outro lado).

2º) isole a massa m, "cortando" também o fio acima dela. As fôrças que agem são o pêso $m\vec{g}$ para baixo e a tração $\vec{T}'$ para cima. Você sabe (Seção XIII-8-3) que $|\vec{T}'| = |\vec{T}|$.

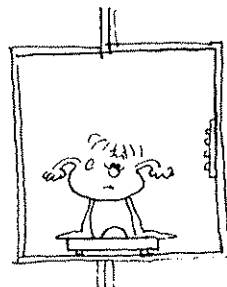
3º) escreva a Segunda Lei para o carrinho e para a massa m, lembrando-se que a aceleração escalar é a mesma para ambos. Tome $10 m/s^2$ como valor de $|\vec{g}|$, para simplificar os cálculos.

Qual é o valor da aceleração?

Qual é a tensão do fio?

XIII-46 Uma locomotiva cuja massa é $1,5 \times 10^2$ toneladas (1 tonelada = 10^3 kg) exerce, sôbre um trem de $6,0 \times 10^2$ toneladas, uma fôrça de tração igual ao décimo do pêso da locomotiva. As resistências (ar, atritos sólidos..) equivalem a uma fôrça de 60N por tonelada da composição.

Qual é a aceleração do trem sôbre um terreno horizontal? Pode tomar $g = 10 m/s^2$.

*XIII-47 O Martins transportou uma balança de banheiro no elevador do edifício onde mora. Trepado na balança, o Martins, que mora no 4º andar, aperta o botão do 12º.

Descreva minuciosamente o que o Martins lê no mostrador da balança.

XIII-48 Em um acelerador, um feixe de protons com velocidade de $1,0 \times 10^6$ m/s penetra em uma região de 50cm de comprimento em que um campo elétrico exerce sôbre cada proton uma fôrça transversal constante de $4,0 \times 10^{-15}$N. Sendo a massa do proton igual a $1,7 \times 10^{-27}$kg, determine:

a) o tempo que leva o feixe para atravessar a região do campo.

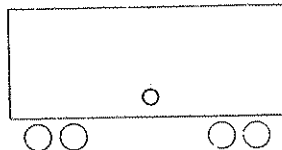
b) o desvio transversal sofrido pelo feixe.

c) a componente transversal da velocidade dos protons ao sairem do campo.

*XIII-49 Explique por que se coloca pó de serragem na área de recepção dos saltos em distância, em altura ou com vara, nas provas de atletismo?

XIII-50 Um pêndulo está suspenso ao teto de um vagão de estrada de ferro. A via férrea é retilínea e horizontal.

Qual é a posição de repouso do pêndulo, no referencial do vagão, quando êste:

a) acelera? b) freia? c) anda com velocidade constante?

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

Capítulo IX.

5) $\frac{1}{2}$ = 0,5 UF. 6) $\frac{1}{3}$ = 0,3 UF. 7) 1 UF. 8) $\frac{2}{3}$ = 0,7 UF.

9) 2 UF. 9) $\frac{4}{3}$ = 1,3 UF. 10) 1 UF. 11) 1 UF. 12) 1 UF.

13) 3 UF. 14) 3 UF. 15) (5) 1 UF; (6) 1 UF; (7) 2 UF;

(8) 2 UF; (9) 2 UF; (9) 4 UF; (10) 1 UF; (11) 1 UF;

(12) 1 UF.

20) zero. 21) 1 UF. 23) (a) 4%; (b) 8% para cada componente.

25) (1) 4 UF para a esquerda; (2) 2 UF para a esquerda; (3) zero;
(4) R_x = 4,8 UF; R_y = 2,8 UF; (5) R_x = 4 UF; R_y = 2 UF;
(6) R_x = -0,8 UF; R_y = 1,6 UF.

26) (1) zero; (2) 1 UF, na mesma direção e no mesmo sentido que a fôrça de 2 UF; (3) 5 UF, a 143° da fôrça de 4 UF, e 127° da fôrça de 3 UF;
(4) F_x = -0,5 UF; F_y = -1 UF; (5) F_x = -6,1 UF; F_y = 2,1 UF;
(6) F_x = 0; F_y = -3,5 UF.

27) $F_1:\sqrt{3}/2 :: F_2:1/2 :: F_3:1$; 29) (a) 20 g.

31) (a) 23 N; (b) 41 N; (c) 8 N; (d) $1,2 \times 10^4$ N; (e) $3,1 \times 10^{-3}$ N.

32) $8,9 \times 10^{-30}$ N.

33) não faz sentido falar em pêso do Universo!

34) 0,3 N. 36) zero. 40) 52 N; $1,2 \times 10^2$ N. 41) 35 N.

42) 2,7 N; 1,0 N.

43) (a) as cordas devem fazer um ângulo de 120^o entre si.
(b) as cordas devem fazer respectivamente 37^o e 53^o com a vertical.
(c) impossível. (d) impossível.

45) $F_x = -5{,}4 \times 10^2 N$; $F_y = 5{,}5 \times 10^3 N$.

46) $2{,}6 \times 10^2 N$; $1{,}7 \times 10^2 N$.

47) $2{,}8 \times 10^2 N$; diretamente oposta à precedente, ao considerar sòmente a madeira do arco; ou zero, ao considerar o arco completo.

CAPÍTULO X.

1) 2,0 m/s; zero; sim. 2) Sim. 3) $3{,}0\ m/s^2$.

4) um referencial em translação circular em um referencial inercial não pode ser inercial.

5) não. 6) não. 7) não. 8) sim.

9) 1º) 5s; 2º) a aceleração da partícula é $\vec{g}$ no referencial terrestre, e nula no referencial da cápsula. O movimento da pedra no referencial da cápsula é retilíneo uniforme. 3º) sim.

10) A nave em órbita é um referencial inercial, desde que se ignore a interação gravitacional.

12) as partículas afastar-se-iam uma da outra.

14) $(m_i)_A/(m_i)_B = 3/2$. 15) $m_A = m_B$.

16) (a) $m_A > m_B$; (c) 0,20 s; 24 cm; (d) 0,45 s; 24 cm;

(e) 0,32 s; as velocidades são iguais, nêsse instante;

(f) $\langle a_A \rangle = -1,8\ m/s^2$; $\langle a_B \rangle = 2,4\ m/s^2$

18) (a) 1,5; (b) 1,7; (c) 1,6;

21) a razão entre as massas é igual a 1,5; independe do referencial inercial escolhido.

22) 0,90 kg. 23) $(m_i)_1/(m_i)_2 = 0,42$; $(m_i)_1/(m_i)_3 = 1,7$;

$(m_i)_2/(m_i)_3 = 4,0$; $(m_g)_2 = 0,24$ kg; $(m_g)_3 = 6,0 \times 10^{-2}$ kg

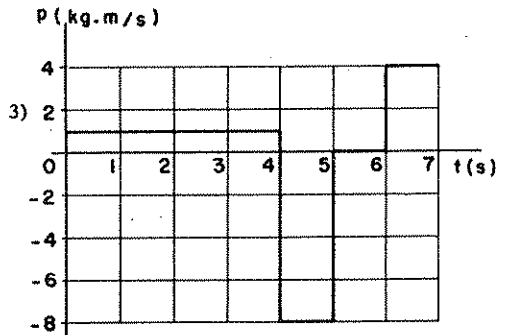
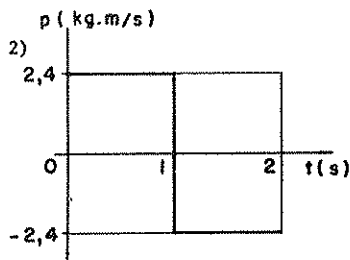
26) 2. 27) 2.

CAPÍTULO XI.

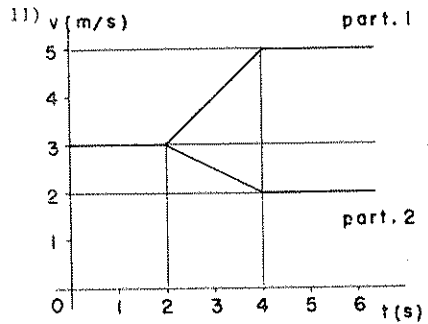
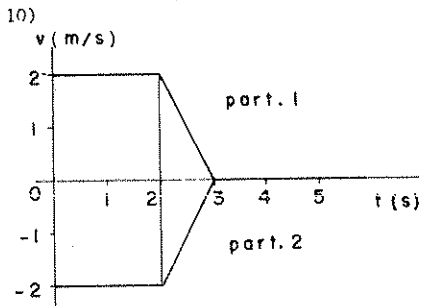
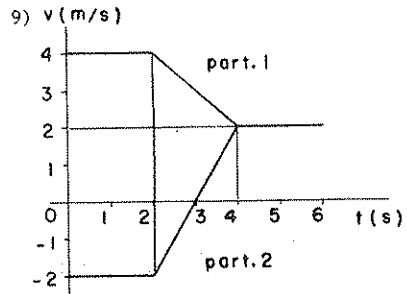
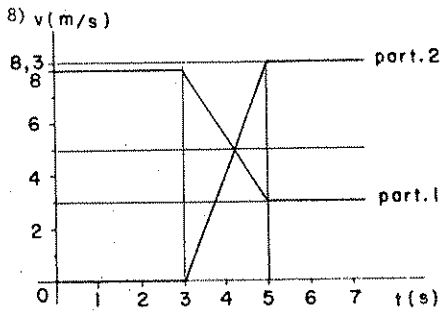
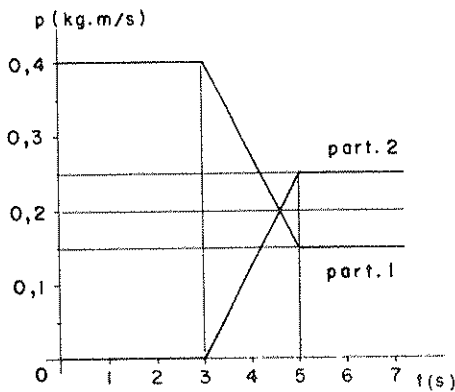
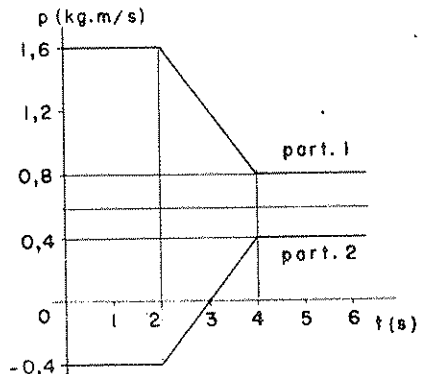
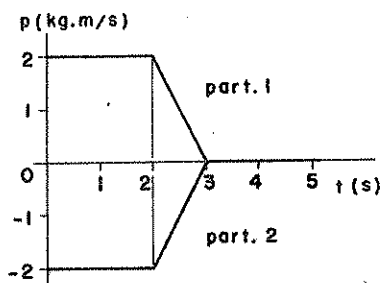
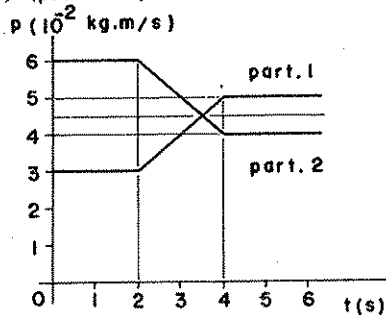
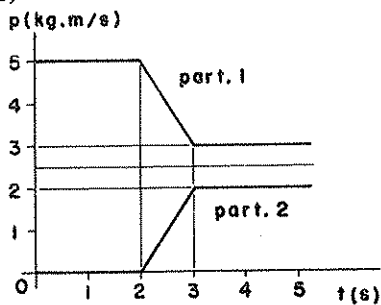
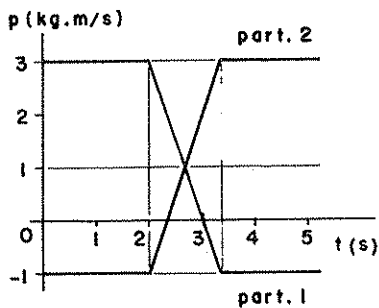
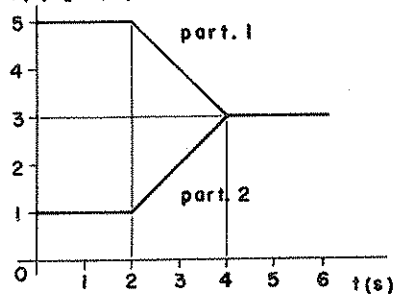
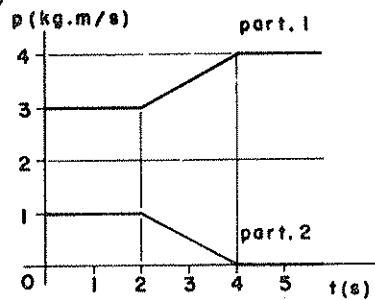
1) $2,0 \times 10^4$ kg.m/s

2)

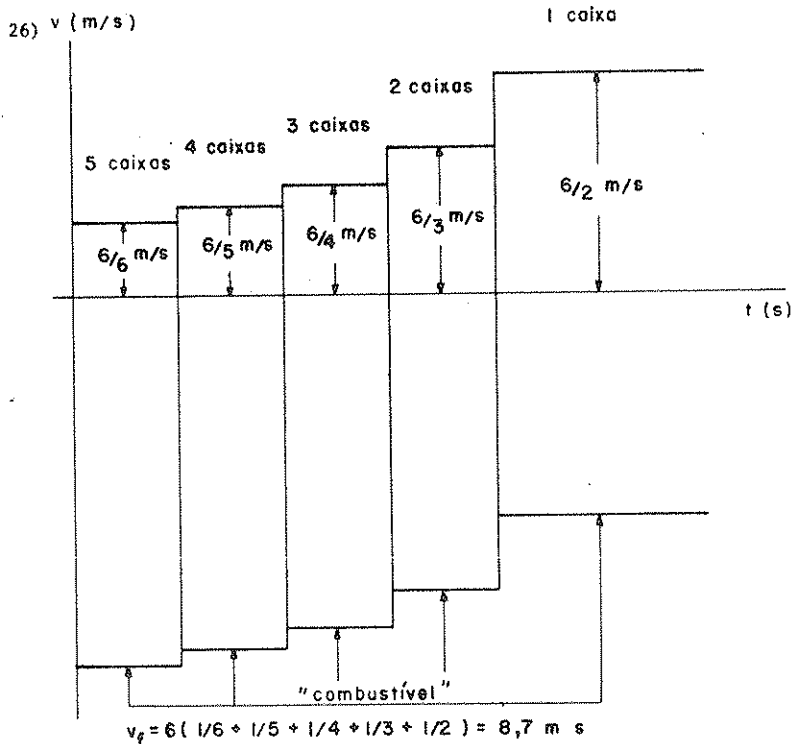
p (kg.m/s)
2,4
0
-2,4
1
2
t(s)

3)

4) 3,0 m/s. 5) 2,3 m/s 6) 1,7 m/s

6 Bis) 3,0 m/s. 7) 4,0 m/s; as partículas continuam juntas.

8) v(m/s)
8,3
8
6
4
2
0 1 2 3 4 5 6 7 t(s)
part.2
part.1
9) v(m/s)
4
3
2
1
0 1 2 3 4 5 6 t(s)
-1
-2
part.1
part.2
10)
v(m/s)
2
1
0 1 2 3 4 5 t(s)
-1
-2
part.1
part.2
11) v(m/s)
5
4
3
2
1
0 1 2 3 4 5 6 t(s)
part.1
part.2
12) (probl. 8)
p(kg.m/s)
0,4
0,3
0,2
0,1
0 1 2 3 4 5 6 7 t(s)
part.2
part.1
12) (probl. 9)
p(kg.m/s)
1,6
1,2
0,8
0,4
0 1 2 3 4 5 6 t(s)
-0,4
part.1
part.2

17) não. 19) −75 cm; −1,2 m/s. 20) 2,0 m/s para a esquerda.

21) 17 km/h. 22) 17 km/h. 23) 60 m. 24) 40 m/s.

26)

27) Deve dividir o mais possível o "combustível".

28) Construir a soma vetorial $(\vec{p}_1)_i + (\vec{p}_2)_i$. Determine então $(\vec{p}_2)_f$ pela condição que a soma $(\vec{p}_2)_i + (\vec{p}_2)_f$ seja igual à soma construída.

29) O momentum $\vec{p}_f$ é determinado pela condição $\vec{p}_f = (\vec{p}_1)_i + (\vec{p}_2)_i$.

30) $(\vec{p}_2)_f = (\vec{p}_2)_i - \Delta\vec{p}_1$

CAPÍTULO XII.

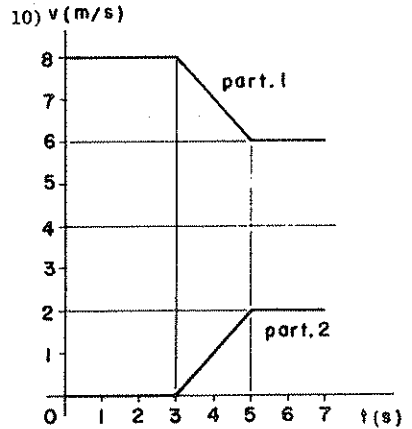
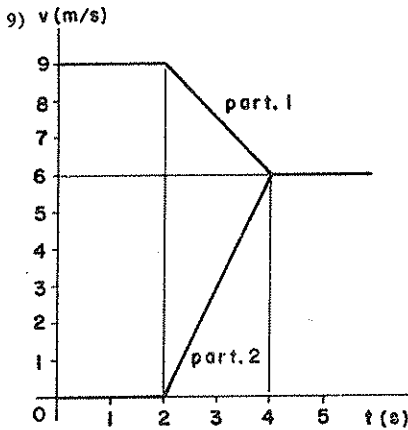
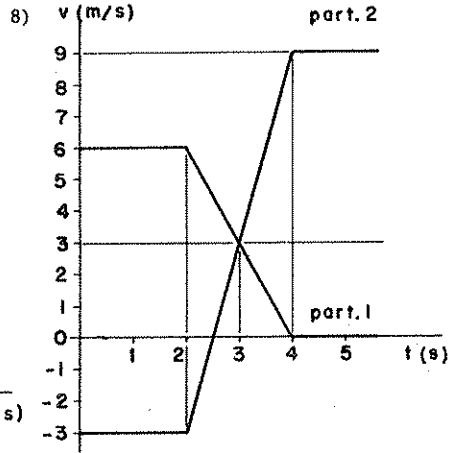
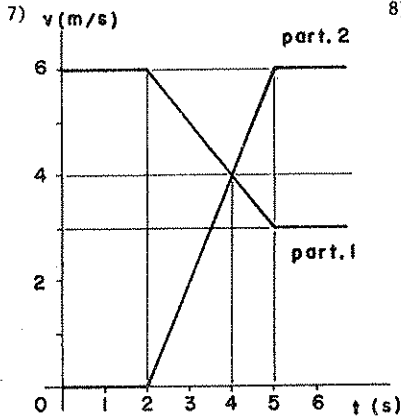
1) (a) 0,54 kg.m/s; (b) 1,8 m/s. 2) $m_1/m_2 = 2/3$.

3) (a) AG = 30cm; (b) AG = 20cm; (c) AG = 20cm; (d) AG = 40cm.

7)

8)

9)

10)

CAPÍTULO XIII.

1) 1- 0,30 kg; 2- substitua a escala vertical dos gráficos v vs t por uma escala graduada em 0,3 kg.m/s. 3- início em t = 2,0 s; final em t = 5,0 s; 4- Δp_A = -0,9 kg.m/s; Δp_B = +0,9 kg.m/s. 5- $\langle \Delta p_A/\Delta t \rangle$ = -3,0 kg.m/s^2. 6- taxa de variação constante, igual a -3,0 kg.m/s^2; 7- F_A = -3,0 N; F_B = = + 3,0 N.

4) 2,7 N. 5) a fôrça de interação é constante;

6) 1- Δp = -9,0 kg.m/s; Δt = 0,60s; $\langle F \rangle$ = -15N.
2- -20N; 3- 30N.

7) 0,60 N; 8) 2,4 x 10^3N; 9) 5,0 m/s^2. 10) 7,8 N.

11) 2- a_1/a_2 = 4. 12) sim. 13) 2,0 m/s^2. 14) 1,0 m/s^2.

15) 1- 0,40 m/s^2; 2- a_A = 0; a_B = 0,67 m/s^2.
4- distância final $\simeq$ 28 cm.

17) 1- 2,8s; 2- 1,4 m/s.

18) as duas fôrças têm mesmo módulo. 19) 6,0 x 10^5N.

20) 1- 0,40kg; 2- Δp_A = 0,27 kg.m/s = $-\Delta p_B$;
3- F_A = 0,90N = $-F_B$; 4- 0,70s.

24) F_{15}/F_{16} = 2. 25) 0,18 kg.

26) 1- 0,60kg; 2- 0,40kg; 3- 1,6N; 4- 9,8N; 5- 6.

28) a bola de tênis. 29) $\vec{v} = \binom{5,0}{5,0}$ (m/s). 31) 6,0 x 10^2N.

32) $\frac{1}{2}\vec{F}$.

33) 1- $1,00 \times 10^{-3}v$; 2- zero; 3- $87,8 \times 10^{-3}$ kg.m/s;

4- $1,00 \times 10^{-3}\ v + 0 = 87,8 \times 10^{-3}$.

5- $v = 87,8$ m/s; 6- $v^* = 25,0$ cm/s:

7- $U = -25,0$ cm/s; $V = 87,6$ m/s.

9- $0,125\ \Delta t$; $43,8\ \Delta t$; 10- $\Delta t = 2,28 \times 10^{-3}$s.

11- $1,10 \times 10^2 m/s^2$; 12- 38,5N.

34) 4- $m_2 = 600g$; 5- $|\vec{F}_1| = 47N$; $|\vec{F}_2| = 48N$.

A Terceira Lei é verificada com precisão $\simeq$ 2%.

35) 17,8 m/s. 36) 60N. 37) $2,4 \times 10^2$N. 43) 3- 32N.

45) 3- $a = 1,1\ m/s^2$; $T = 0,45N$. 46) $0,13\ m/s^2$.

48) a- $5,0 \times 10^{-7}$s; b- 29 cm; c- $1,2 \times 10^6$ m/s.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1) A tensão máxima a que determinada corda pode ser submetida sem quebrar é $5,0 \times 10^2$N. Essa corda tem 12m de comprimento e está prêsa pelas suas extremidades a dois suportes situados na mesma altura e distando 10m.

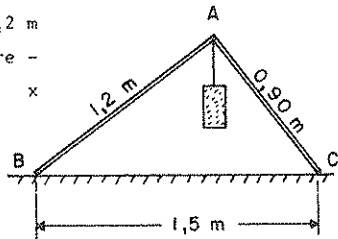
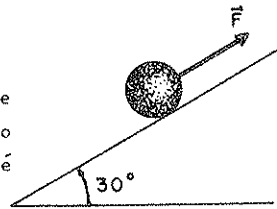
O pêso máximo que se poderá suspender no meio da corda é de:

A) $2,7 \times 10^2$N; B) $3,8 \times 10^2$N; C) $5,5 \times 10^2$N;

D) $7,4 \times 10^2$N; E) $2,0 \times 10^3$N.

2) As duas hastes têm comprimentos respectivos 1,2 m e 0,90 m. Elas estão ligadas em A, em ângulo reto, e nêsse ponto está suspenso um pêso de $5,0 \times 10^3$N.

As compressões das hastes são:

	haste AB	haste AC
A)	$5,0 \times 10^3$ N	$5,0 \times 10^3$ N
B)	$4,0 \times 10^3$ N	$5,0 \times 10^3$ N
C)	$5,0 \times 10^3$ N	$3,0 \times 10^3$ N
D)	$4,0 \times 10^3$ N	$3,0 \times 10^3$ N
E)	$3,0 \times 10^3$ N	$4,0 \times 10^3$ N

3) Qual é o módulo da fôrça $\vec{F}$ que mantém uma bola de $6,0 \times 10^2$N em equilíbrio sôbre um plano inclinado de 30°? A fôrça $\vec{F}$ é paralela ao plano e o atrito é desprezível.

A) $6,0 \times 10^2$N; B) $4,0 \times 10^2$N;

C) $3,0 \times 10^2$N; D) $2,0 \times 10^2$N;

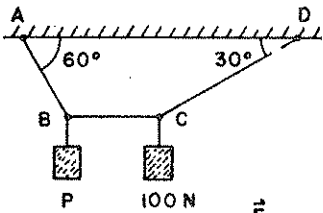
E) $5,2 \times 10^2$N.

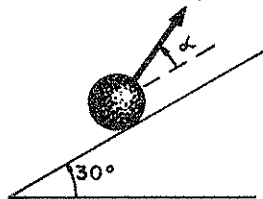
4) Nas mesmas condições da pergunta precedente, qual é o módulo da fôrça $\vec{F}$ (sempre paralela ao plano) que manterá a bola em movimento retilíneo uniforme ao longo do plano inclinado?

A) 100 N;   B) 200 N;   C) 300 N;   D) 400 N;   E) 500 N.

5) Três cordas AB, BC e CD sustentam um pêso de 100 N e outro pêso desconhecido P, como mostra a figura ao lado. A corda BC é horizontal.

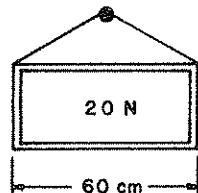
O pêso P é:

A) 100 N;   B) 200 N;
C) 300 N;   D) 400 N;
E) 500 N.

6) Não há atrito entre a bola e o plano inclinado. A fôrça $\vec{F}$ de <u>menor</u> módulo que mantém a bola em equilíbrio faz com a direção de maior declive do plano um ângulo α:

A) igual a 30°;   B) igual a zero;
C) entre zero e 30°;
D) entre 30° e 45°;
E) maior que 45°.

7) Se a tensão máxima permitida para a corda que sustenta o quadro é 30 N, qual o menor comprimento possível para a corda?

20 N

60 cm

A) 90 cm;   B) 84 cm;   C) 72 cm;
D) 64 cm;   E) 60 cm.

8) Uma viga de seção quadrada está suspensa por meio de uma corda cujo comprimento total é 90 cm.

Sabendo-se que o pêso da viga é 500 N e que o lado da seção mede 20 cm, qual é a tensão da corda?

A) 290 N; B) 330 N; C) 410 N; D) 500 N; E) 580 N.

9) Suponha que a massa inercial, em vez de ser proporcional à massa gravitacional, fôsse proporcional ao quadrado dessa massa.

Dois corpos (1) e (2), cujas massas gravitacionais são respectivamente 1,0 kg e 2,0 kg, caem no vácuo, na superfície da Terra. Sendo $\underline{a_1}$ a aceleração do corpo (1), a aceleração do corpo (2) é:

A) a_1. B) $\frac{1}{2} a_1$. C) $2a_1$. D) $\frac{1}{4} a_1$. E) $4a_1$.

<u>PERGUNTAS 10 A 15</u>.

Temos um dinamômetro graduado em Newtons. Utilizamos êsse dinamômetro para marcar uma série de pêsos-padrões, no Rio de Janeiro. Por exemplo, suspendendo-se ao instrumento uma massa de 1,00 kg, o dinamômetro marca 9,78N e gravamos então <<9,78 N>> sôbre o quilograma.

A tripulação da Apolo XII concorda em levar para a Lua nossa caixa de pêsos assim marcados, o dinamômetro, e uma balança de braços iguais. A intensidade do campo gravitacional na superfície da Lua é 6,0 vêzes menor que na Terra.

10) Um astronauta suspende uma pedra "lunar" ao dinamômetro. O instrumento indica 12 N. A mesma pedra é pesada na balança de pêsos iguais. Acha-se:

A) 12 N; B) 2,0 N; C) 6,0 N; D) 72 N;

E) nenhuma das respostas anteriores.

11) O astronauta deixa cair a pedra que êle acaba de pesar. A aceleração da pedra é:

A) 1,2 m/s^2; B) 1,6 m/s^2; C) 0,81 m/s^2; D) 9,8 m/s^2;

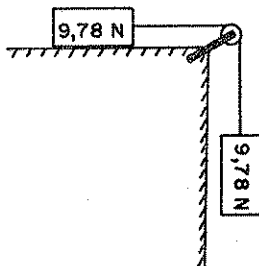
E) 0,74 m/s^2.

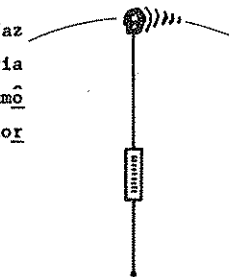
12) O astronauta suspende ao dinmmômetro o pêso padrão que tínhamos gravado com a menção <<9,78 N>>. O instrumento indica:

A) 1,2 N; B) 1,6 N; C) 0,81 N; D) 9,8 N; E) 0,74 N.

13) O astronauta vai para o Laboratório de Física (na Lua) e monta a experiência representada na figura ao lado, com dois pêsos padrões idênticos, marcados <<9,78 N>>. Não há atrito.

A aceleração do sistema é:

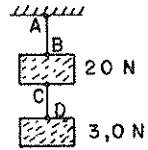
A) 1,2 m/s^2;
B) 1,6 m/s^2;
C) 0,81 m/s^2;
D) 9,8 m/s^2;
E) 0,74 m/s^2.

14) O astronauta amarra uma pedra "lunar" a uma corda e faz girar a pedra em um plano horizontal, numa trajetória de 1,0 m de raio, à razão de 4 voltas por segundo. O dinamômetro intercalado na corda marca $6,4 \times 10^2$N. A tensão da corda é:

A) $6,4 \times 10^2$N; B) 1,06 N;
C) $3,8 \times 10^3$N; D) $1,6 \times 10^2$N;
E) $9,6 \times 10^2$N.

15) Refira-se à pergunta precedente. A pedra é destacada da corda e posta na balança de braços iguais. O pêso marcado que a equilibra é:

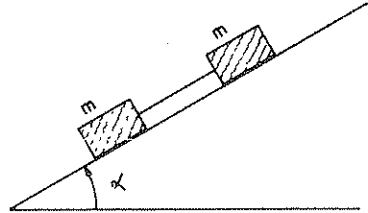
A) 1,63 N; B) 3,26 N; C) 4,89 N; D) 9,78 N; E) $6,4 \times 10^2$N.

16) A mesma pedra é agora suspensa ao dinamômetro. O instrumento indica:

A) 1,63 N; B) 3,26 N; C) 4,89 N; D) 9,78 N; E) $6,4 \times 10^2$N.

17) Dois corpos cujos pêsos são respectivamente 5,0 N e 20 N estão suspensos no Laboratório como mostra a figura ao lado. Corta-se o fio AB. No decorrer da queda do conjunto dos dois corpos, a tensão do fio CD vale:

A) zero; B) 5,0 N; C) 15 N; D) 20 N;
E) 25 N.

18) Dois corpos de mesma massa, unidos por um fio inextensível, descem ao longo de um plano inclinado. Não há atrito entre o corpo (1) e o plano. Pode ou não existir atrito entre o corpo (2) e o plano. Quais das seguintes afirmações estão certas?

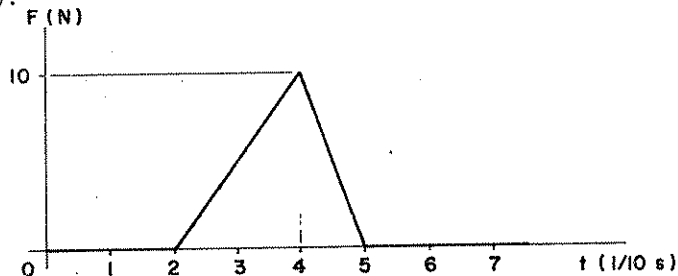
I) Se não houver atrito entre o corpo (2) e o plano, a tensão do fio é nula.
II) Se houver atrito entre o corpo (2) e o plano, a aceleração do corpo (2) é menor que a do corpo (1).
III) Se o coeficiente de atrito ultrapassa um valor limite que depende do ângulo α, a aceleração do conjunto será dirigida para cima.
IV) A aceleração do conjunto é inversamente proporcional ao coeficiente de atrito entre o corpo (2) e o plano.

A) I e IV; B) I, II e IV; C) II, III e IV; D) tôdas;
E) sòmente I.

19) Duas partículas cujas massas são m_1 = 1,0 kg e m_2 = 2,0 kg percorrem a mesma trajetória retilínea com velocidades v_1 = 4,0 m/s e v_2 = 10 m/s. A velocidade do centro de massa das duas partículas é:

A) 2,0 m/s; B) 4,0 m/s; C) 6,0 m/s; D) 8,0 m/s;
E) 10 m/s.

PERGUNTAS 20 A 23.

A fôrça de interação que age sôbre uma partícula varia em função do tempo conforme o gráfico abaixo.

Em $t = 0$ a velocidade da partícula era nula. (O referencial é o Laboratório).

20) O impulso da fôrça de interação foi:

A) zero; B) 0,50 N.s; C) 1,0 N.s; D) 1,5 N.s;
E) 3,0 N.s.

21) A massa da partícula é 1,0 kg. Sua velocidade em $t = 0{,}4$s era:

A) zero; B) 0,50 m/s; C) 1,0 m/s; D) 1,5 m/s;
E) 3,0 m/s.

22) A velocidade da partícula em $t = 0{,}6$s era:

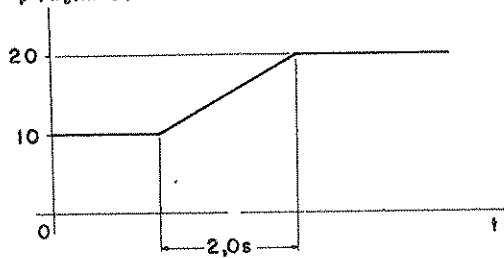
A) zero; B) 0,50 m/s; C) 1,0 m/s; D) 1,5 m/s;
E) 3,0 m/s.

23) A fôrça média de interação foi:

A) 1,0 N; B) 0,50 N; C) 5,0 N; D) 10 N; E) zero.

PERGUNTAS 24 E 25.

O gráfico $\underline{p}$ vs $\underline{t}$ de uma partícula em movimento retilíneo no Laboratório é representado na figura abaixo.

Durante o intervalo assinalado de 2,0s a partícula interage com outra.

24) A fôrça de interação é:

A) 5,0 N;   B) 10 N;   C) 20 N;   D) 40 N;   E) 50 N.

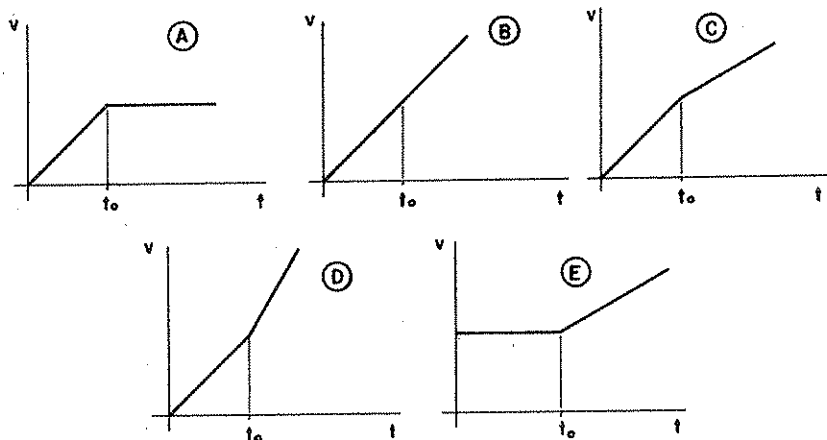
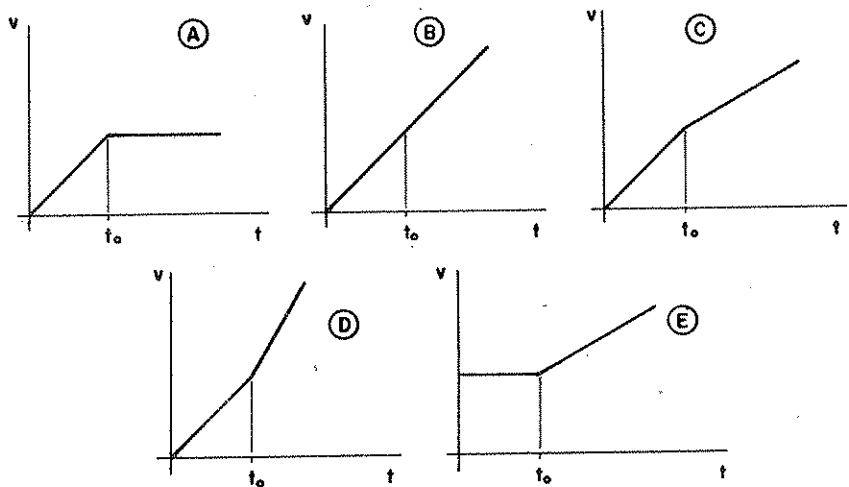
25) Durante a interação o momentum da outra partícula variou de:

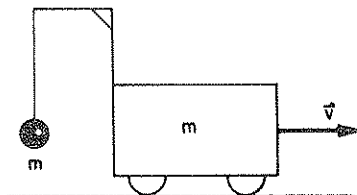
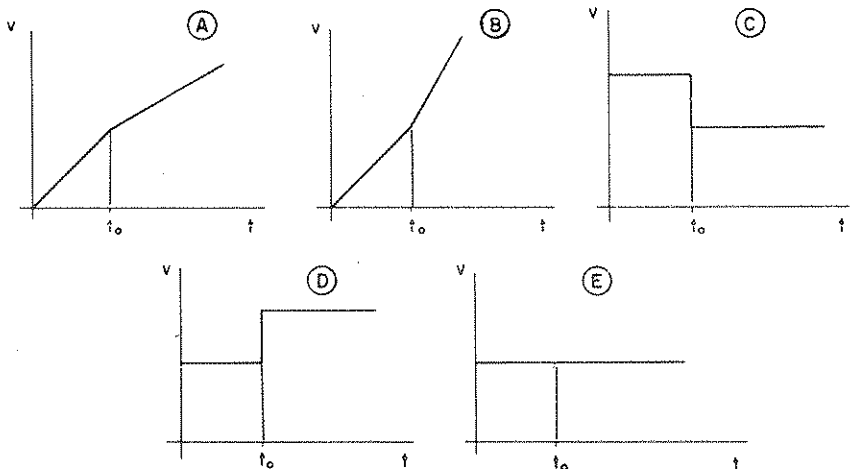
A) zero;   B) 5,0 kg.m/s;   C) 10 kg.m/s;   D) -5,0 kg.m/s;
E) -10 kg.m/s.

PERGUNTAS 26 E 27.

Dois carrinhos idênticos são ligados por um fio de nylon. Puxa-se o conjunto sôbre um plano horizontal com uma fôrça constante $\vec{F}$.

Em determinado instante t_o queima-se o fio que une os carrinhos, mantendo-se a fôrça $\vec{F}$ sempre constante.

26) Desprezando-se os atritos entre os carrinhos e o plano, o gráfico v vs t do movimento do carrinho I é:

27) Desprezando-se os atritos entre os carrinhos e o plano, o gráfico v vs t do movimento do carrinho II é:

28) Um carrinho de massa $\underline{m}$ tem uma bola de mesma massa suspensa na traseira por um fio. O conjunto anda com velocidade constante $\vec{v}$ sôbre um plano horizontal. Os atritos são desprezíveis.

No instante t_o queima-se o fio que sustenta a bola.

O gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ do movimento do carrinho é:

29) Uma carabina tem um cano de 0,64 m de comprimento e atira um projétil de 20 g com velocidade inicial de $8,0 \times 10^2$ m/s.

A fôrça média exercida sôbre o projétil enquanto percorre o cano da arma é:

A) $1,0 \times 10^3$N; B) $1,0 \times 10^4$N; C) $1,0 \times 10^5$N;

D) $1,0 \times 10^6$N; E) $1,0 \times 10^7$N.

30) Cinco afirmações são propostas a seguir a respeito da unidade de fôrça, o Newton:

I) O Newton dá a uma massa de 1 kg uma velocidade de 9,8 m/s em 1 s.

II) O Newton dá a uma massa de 1 kg uma velocidade de 1 m/s em 1 s.

III) O Newton dá a uma massa de 1 kg uma aceleração de 9,8 m/s^2.

IV) O Newton dá a uma massa de 1 kg uma aceleração de 1m/s^2.

V) O Newton desloca uma massa de 1 kg de 1 m em 1 s.

As afirmações certas são:

A) I, III apenas; B) II, IV e V apenas;
C) I, III e V apenas; D) II, IV apenas;
E) IV e V apenas.

31) O Martins empurra um caixote sôbre um piso horizontal. (A fôrça que êle exerce sôbre o caixote é horizontal).

Você observa que a velocidade do caixote é aproximadamente constante, e você conclui então que a fôrça exercida pelo Martins sôbre o caixote é:

A) maior que a fôrça de atrito exercida pelo piso sôbre o caixote;
B) igual à fôrça de atrito exercida pelo piso sôbre o caixote;
C) menor que a fôrça de atrito exercida pelo piso sôbre o caixote;
D) igual ao pêso do caixote;
E) igual ao pêso do Martins.

PERGUNTAS 32 E 33.

Os esquimós costumam entregar as pedras de gêlo, a domicílio, amarrando-as por fios, e rebocando o conjunto (brincando de tremzinho, em resumo).

A Figura abaixo, mostra o geleiro com um trem de três pedras idênticas.

32) O trem de gêlo anda com velocidade constante. O atrito sôbre o chão é desprezível. Sendo T_1, T_2 e T_3 as tensões dos fios (1), (2) e (3) respectivamente, temos:

A) $T_1 = T_2 = T_3 = 0$; B) $T_1 = T_2 = T_3 \neq 0$;

C) $T_1/1 = T_2/2 = T_3/3$; D) $T_1/3 = T_2/2 = T_3/1$;

E) $T_1 = 2T_2 = 3T_3$.

33) O trem de gêlo anda com velocidade constante mas há atrito (uniforme) sôbre o chão. Podemos afirmar que:

A) $T_1 = T_2 = T_3 = 0$; B) $T_1 = T_2 = T_3 \neq 0$;

C) $T_1/1 = T_2/2 = T_3/3$; D) $T_1/3 = T_2/2 = T_3/1$;

E) $T_1 = 2T_2 = 3T_3$.

PERGUNTAS 34 A 38.

Dois carrinhos cujas massas são respectivamente m e 2m são ligados por uma mola e podem movimentar-se sôbre um plano horizontal com atrito desprezível.

Observa-se que quando a mola é alongada de Δx a aceleração do carrinho de massa m é a.

34) Nessas condições o valor absoluto da aceleração do carrinho de massa 2m é:

A) $\frac{1}{2}$ a; B) a; C) 2a; D) 3a; E) 4a.

35) Os carrinhos são ligados por duas molas idênticas à precedente, dispostas em série. Quando cada uma das molas fôr alongada de $\underline{\Delta x}$ a aceleração do carrinho de massa $\underline{m}$ será, em valor absoluto:

A) $\frac{1}{2}$ a; B) a; C) 2a; D) 3a; E) 4a.

36) Nas condições da pergunta precedente a aceleração do carrinho de massa $\underline{2m}$ será, em valor absoluto:

A) $\frac{1}{2}$ a; B) a; C) 2a; D) 3a; E) 4a.

37) As mesmas duas molas são agora dispostas em paralelo entre os carrinhos. Quando cada uma delas é alongada de $\underline{\Delta x}$ o valor absoluto da aceleração do carrinho de massa $\underline{m}$ será:

A) $\frac{1}{2}$ a; B) a; C) 2a; D) 3a; E) 4a.

38) Nas condições da pergunta precedente, o valor absoluto da aceleração do carrinho de massa $\underline{m}$ será:

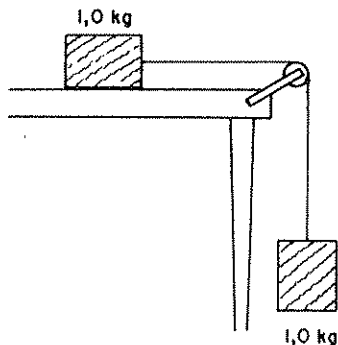
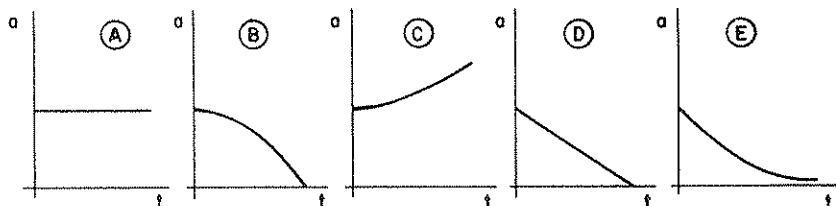
A) $\frac{1}{2}$ a; B) a; C) 2a; D) 3a; E) 4a.

PERGUNTAS 39 A 41.

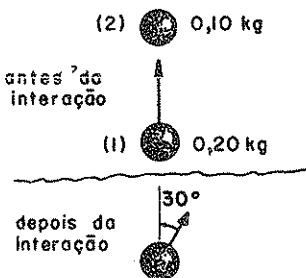
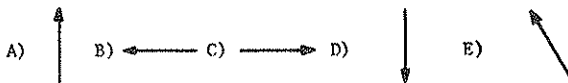
39) Desprezando-se o atrito entre o bloco e a mesa, qual é a aceleração do sistema? ($g = 10\ m/s^2$)

A) $1,0\ m/s^2$; B) $2,0\ m/s^2$;
C) $3,0\ m/s^2$; D) $5,0\ m/s^2$;
E) $10\ m/s^2$.

40) A tensão do fio é:

A) 1,0 N; B) 2,0 N; C) 5,0 N; D) 10 N; E) 20 N.

41) Suponha que depois de 20 cm de queda, a massa de 1,0 kg suspensa ao fio penetra em um recipiente profundo contendo óleo. Qual dos seguintes gráficos melhor representa a aceleração do sistema em função do tempo, a partir dêsse instante?

PERGUNTAS 42 A 44.

Uma partícula (1) de massa 0,20 kg e com velocidade de 3,0 m/s (no Laboratório) interage com outra partícula (2) de massa 0,10 kg inicialmente em repouso.

Depois da interação a partícula (1) tem velocidade de 1,7 m/s, a 30° da direção da velocidade inicial, como mostra a figura ao lado.

42) Depois da interação a velocidade da partícula (2) é representada pelo vetor:

43) Depois da interação o módulo da velocidade da partícula (2) é:

A) 1,0 m/s; B) 2,0 m/s; C) 3,0 m/s; D) 4,0 m/s;
E) nenhum dos valores propostos.

44) Suponha que a interação dure 0,10s. A fôrça média de interação é:

A) 1,0 N; B) 1,5 N; C) 3,0 N; D) 3,5 N; E) 6,0 N.

PERGUNTAS 45 A 47.

Uma nave com velocidade de 4,0 km/s (em um referencial inercial ligado à Terra) está na região entre a Terra e a Lua onde o campo gravitacional resultante é pràticamente nulo.

A massa da nave é $1,0 \times 10^4$ kg, inclusive o combustível para os motores.

O comandante da nave liga os jatos. Êsses queimam $1,0 \times 10^2$ kg de combustível por segundo. Os gases da combustão são expelidos para trás com velocidade de $1,0 \times 10^3$ m/s em relação à nave.

45) Qual é a aceleração da nave imediatamente depois dos motores começarem a funcionar?

A) $1,0 \times 10^{-2}$ m/s^2; B) $1,0 \times 10^{-1}$ m/s^2; C) 1,0 m/s^2;
D) 10 m/s^2; E) $1,0 \times 10^2$ m/s^2.

46) Qual é a aceleração da nave 10s depois dos motores terem sido ligados?

A) $1,1 \times 10^{-2}$ m/s^2; B) $1,1 \times 10^{-1}$ m/s^2; C) 1,1 m/s^2;
D) 11 m/s^2; E) $1,1 \times 10^2$ m/s^2.

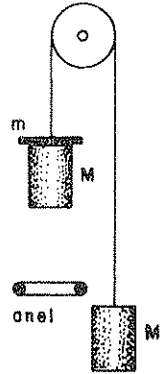
47) Qual é, aproximadamente, a velocidade da nave 10s depois dos motores terem sido ligados?

A) 4,0 km/s; B) 4,1 km/s; C) 4,3 km/s; D) 4,5 km/s;
E) 5,0 km/s.

PERGUNTAS 48 A 52.

Uma polia extremamente leve sustenta um fio de nylon nas extremidades do qual estão suspensas duas massas iguais M. O sistema está em equilíbrio estático no Laboratório.

Rompe-se êsse equilíbrio colocando sôbre uma das massas M uma sôbrecarga em forma de um disco de massa m. Começa assim o que será designado por "1ª fase do movimento."

Abaixo do conjunto massa M-sôbrecarga, encontra-se um anel cujo diâmetro é maior que o da massa M, porém menor que o do disco sôbrecarga. Em consequência, a massa M atravessa o anel, mas a sôbrecarga fica prêsa. Começa então a "2ª fase do movimento."

48) Qual é a aceleração do sistema durante a 1ª fase?

A) $\frac{m}{M + m}$ g; B) $\frac{2m}{M + m}$ g; C) $\frac{m}{M + 2m}$ g;

D) $\frac{m}{2M + m}$ g; E) g.

49) Qual é a tensão do fio durante a 1ª fase?

A) Mg; B) mg; C) $(1 - \frac{m}{2M + m})$ Mg; D) $(1 + \frac{m}{2M + m})$ Mg;

E) $\frac{Mm}{2M + m}$ g.

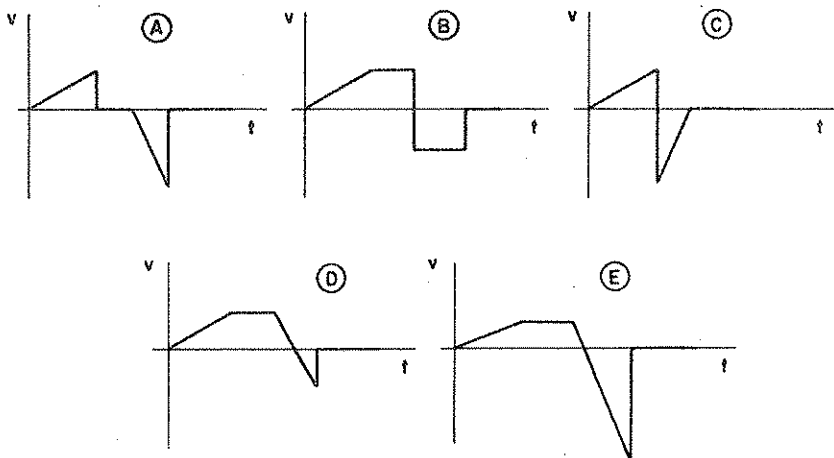
50) Qual é a aceleração do sistema durante a 2ª fase?

A) g; B) $\frac{1}{2}$ g; C) 2g; D) $\frac{3}{2}$ g; E) zero.

51) Qual é a tensão do fio durante a 2ª fase?

A) Mg; B) $\frac{1}{2}$ Mg; C) 2Mg; D) $\frac{3}{2}$ Mg; E) zero.

52) Depois da sôbrecarga ficar prêsa no anel, interrompe-se a $2^{\underline{a}}$ fase do movimento queimando-se o fio que sustenta a massa M (a que atravessou o anel).

Qual dos gráficos propostos abaixo representa a velocidade da outra massa M em função do tempo desde o início da $1^{\underline{a}}$ fase até o instante em que a massa cai no chão do Laboratório?

53) No decorrer de uma experiência na mesa de ar, um disco atravessou uma fôlha de papel que tinha sido fixada sôbre a mesa.

A fotografia estroboscópica mostrou que a velocidade do disco antes de chegar à fôlha era 2,2 m/s. Depois de atravessar a fôlha a velocidade era 1,0 m/s. O disco levou 0,30s para atravessar a fôlha.

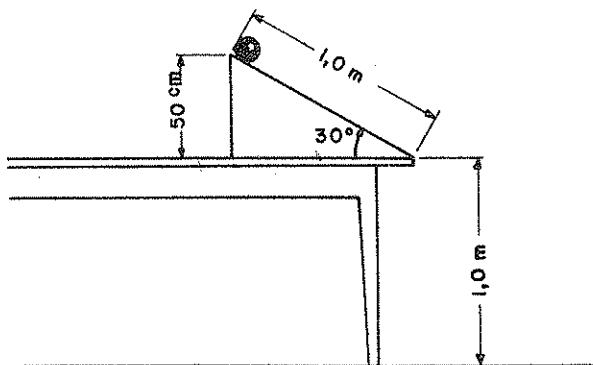
Sendo a massa do disco 0,30 kg, a fôrça média de atrito exercida pela fôlha sôbre o disco foi de:

A) 0,30 N;   B) 0,60 N;   C) 0,90 N;   D) 1,2 N;   E) 1,5 N.

54) O Martins instalou uma rampa inclinada sôbre uma mesa de 1,0 m de altura. A rampa faz um ângulo de 30^{o} com a mesa, e tem comprimento de 1,0 m.

Martins coloca uma bola de gude na extremidade superior da rampa.

Desprezando-se o atrito entre a bola e a rampa, a que distâccia da

mesa a bola cairá no chão? $g = 10\ m/s^2$.

A) 0,86 m; B) 1,2 m; C) 1,9 m; D) 2,2 m; E) 4,4 m.

55) Qual ou quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

Chuta-se uma bola para cima. Desprezando-se a resistência do ar, a componente vertical da aceleração da bola, na sua trajetória, depende:

I) da componente vertical da fôrça exercida pelo pé ao chutar a bola.

II) da componente horizontal da fôrça exercida pelo pé ao chutar a bola.

III) da direção (ângulo com a horizontal) em que a bola foi chutada.

IV) da velocidade inicial da bola.

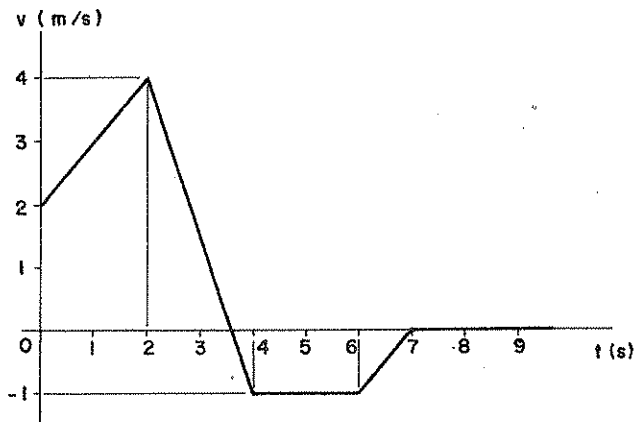
V) da massa da bola.

A) tôdas; B) nenhuma; C) I, III e V;
D) I; E) I e V.

<u>PERGUNTAS 56 A 59</u>.

O gráfico a seguir representa, em função do tempo, a velocidade de

uma partícula medida em um referencial inercial.

A massa da partícula é 2,0 kg.

56) No intervalo (2s, 4s), o módulo da fôrça resultante sôbre a partícula foi:

A) 1,0 N; B) 2,0 N; C) 3,0 N; D) 4,0 N; E) 5,0 N.

57) No intervalo (0, 6s) a variação do momentum da partícula foi:

A) 2,0 kg.m/s; B) 4,0 kg.m/s; C) 6,0 kg.m/s;
D) -4,0 kg.m/s; E) -6,0 kg.m/s.

58) No intervalo (3s, 7s), o módulo da fôrça resultante <u>média</u> foi:

A) 1,6 N; B) 2,0 N; C) 3,2 N; D) 8,0 N;
E) nenhum dos valores propostos.

59) Em qual dos seguintes intervalos a fôrça resultante foi nula?

A) (0, 2s); B) (2s, 4s); C) (4s, 6s); D) (6s, 7s);
E) em nenhum dêles.

60) Largam-se de uma grande altura duas bolas de mesmo raio, e cujas massas específicas são respectivamente μ_1 e μ_2. Durante a queda, a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.

A razão $\frac{v_1}{v_2}$ entre as velocidades limites atingidas pelas duas bolas é igual a:

A) 1; B) $\frac{\mu_1}{\mu_2}$; C) $(\frac{\mu_1}{\mu_2})^2$; D) $\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$; E) $\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$.

61) Largam-se de uma grande altura duas bolas feitas do mesmo material e cujos raios são respectivamente R_1 e R_2. Durante a queda, a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.

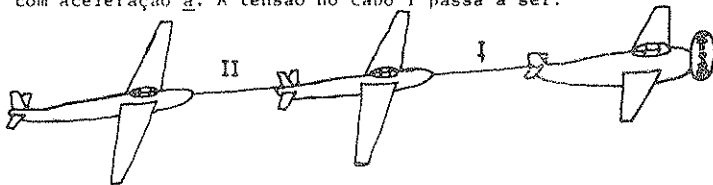
A razão $\frac{v_1}{v_2}$ entre as velocidades limites atingidas pelas duas bolas é igual a:

A) 1; B) $\frac{R_1}{R_2}$; C) $(\frac{R_1}{R_2})^2$; D) $\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$; E) $\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$.

62) Uma pequena pedra cai de uma grande altura, atingindo uma velocidade limite v_2. Qual é a aceleração da pedra quando a velocidade é sòmente a metade da velocidade limite? Suponha que a resistência do ar é da forma

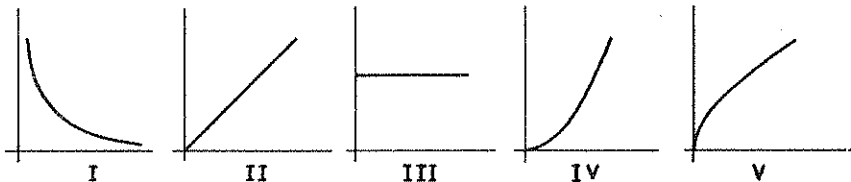
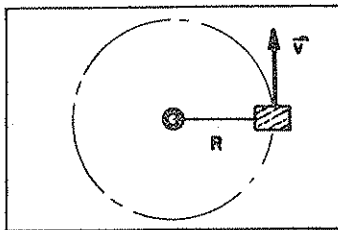
$$|F| = k\ v^2\ (k = \text{cte}).$$

A) $\frac{1}{4}$ g; B) $\frac{1}{2}$ g; C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ g; D) $\frac{3}{4}$ g; E) g.

63) Um avião reboca dois planadores idênticos, de massa $\underline{m}$, com velocidade uniforme. A tensão no cabo II é então T_o. De repente o avião começa a acelerar com aceleração $\underline{a}$. A tensão no cabo I passa a ser:

A) T_o;   B) $T_o + ma$;   C) $T_o + 2ma$;   D) $2T_o + ma$;   E) $2T_o + 2ma$.

PERGUNTAS 64 A 69.

Um corpo de massa m pode mover-se sem atrito sôbre uma mesa horizontal. Um fio inextensível amarrado ao corpo passa pelo centro da mesa e sustenta uma massa M. Dando-se à massa m uma velocidade horizontal $\vec{v}$ perpendicular ao fio, observa-se que essa massa descreve uma circunferência de raio R com movimento uniforme.

Considere por outro lado os cinco gráficos abaixo:

64) Conservando-se constante o módulo da velocidade $\vec{v}$, faz-se variar a massa suspensa M. Qual dos gráficos representa o raio R da trajetória em função de M?

A) I;   B) II;   C) III;   D) IV;   E) V.

65) Conservando-se constante o módulo da velocidade $\vec{v}$, faz-se variar a massa suspensa M. Qual dos gráficos representa o período T do movimento circular em função de M?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

66) Conservando-se constante o módulo da velocidade $\vec{v}$, faz-se variar a massa suspensa M. Qual dos gráficos representa a tensão do fio em função de M?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

67) Conservando-se constante a massa M, faz-se variar o módulo da velocidade $\vec{v}$. Qual dos gráficos representa o raio da trajetória em função de $|\vec{v}|$?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

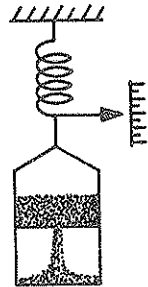
68) Conservando-se constante a massa M, faz-se variar o módulo da velocidade $\vec{v}$. Qual dos gráficos representa o período T do movimento em função de $|\vec{v}|$?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

69) Conservando-se constante a massa M, faz-se variar o módulo da velocidade $\vec{v}$. Qual dos gráficos representa o módulo da aceleração do movimento circular, em função de $|\vec{v}|$?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

PERGUNTAS 70 A 74.

A figura mostra um recipiente suspenso a um dinamômetro. O recipiente está dividido em dois compartimentos por uma chapa com uma abertura de área S. No início da experiência essa abertura está fechada e o compartimento superior contem areia. O compartimento inferior está vazio. No instante t_o, desimpede-se a abertura de comunicação, e a areia começa a cair no compartimento inferior.

Você suporá, no que segue, que a massa de areia que flui pela abertura por unidade de tempo e por unidade de área é constante, representando-se por μ essa constante.

70) Suponha que, em determinado instante $\underline{t}$, a altura da coluna da areia que cai entre o compartimento superior e o compartimento inferior, é igual a $\underline{x}$. O pêso dessa coluna é:

A) μgSx; B) $\mu S\sqrt{2gx}$; C) $\frac{1}{2}\mu gSx^2$; D) $\sqrt{\frac{2\mu gS}{x}}$; E) $\sqrt{2\mu gSx}$.

71) No mesmo instante $\underline{t}$ a velocidade com que a base da coluna de areia está chegando à base do compartimento inferior é:

A) gx; B) $\frac{1}{2}gx^2$; C) $\sqrt{2gx}$; D) $\sqrt{\frac{2x}{g}}$; E) $2gx$.

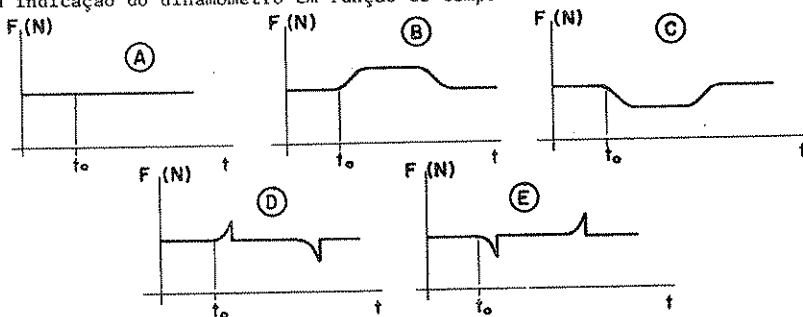
72) No intervalo de tempo $\underline{dt}$, a massa de areia que, ao cair, entre em repouso no compartimento inferior é:

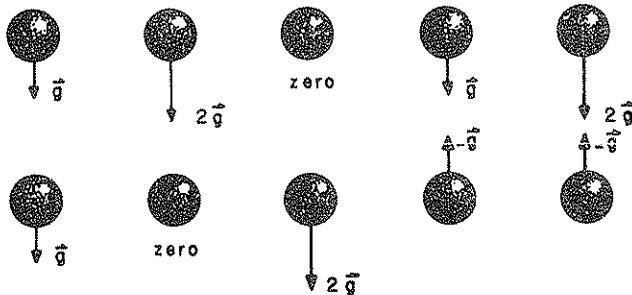
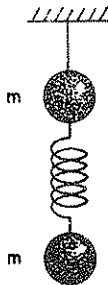
A) $\mu S\sqrt{2gx}$; B) $\frac{\mu S dt}{\sqrt{2gx}}$; C) $\mu S dt$; D) $\frac{2gx}{\mu S}dt$; E) $\sqrt{2\mu S dt}$.

73) Do que precede, concluímos que a fôrça que a coluna de areia, ao cair exerce sôbre a base do compartimento inferior do recipiente enquanto houver areia no compartimento superior, é:

A) $\mu S\sqrt{2gx}$; B) μgSx; C) $\frac{1}{2}\mu gSx^2$; D) $\sqrt{\frac{2\mu gS}{x}}$; E) $\sqrt{2\mu gSx}$.

74) O dinamômetro é suficientemente amortecido para não oscilar: o que êle indica é consequentemente, em cada instante, a fôrça estática exercida pelo recipiente sôbre a mola.

Qual dos cinco gráficos propostos representados a seguir representa a indicação do dinamômetro em função do tempo?

75) O conjunto das duas bolas de massa m, ligadas por uma mola, está suspenso no Laboratório a um suporte-fixo. Queima-se o fio de suspensão.

Imediatamente depois de queimar o fio, qual dos seguintes pares representados a seguir, representa as acelerações das duas bolas no Laboratório?

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1) C.
2) E.
3) C.
4) C.
5) C.
6) B.
7) D.
8) A.
9) B.
10) D.
11) B.
12) B.
13) C.
14) A.
15) D.
16) A.
17) A.
18) E.
19) D.
20) D.
21) C.
22) D.
23) C.
24) A.
25) E.
26) D.
27) A.
28) E.
29) B.
30) D.
31) B.
32) A.
33) D.
34) A.
35) B.
36) A.
37) C.
38) B.
39) D.
40) C.
41) E.
42) E.
43) E.
44) D.
45) D.
46) D.
47) B.
48) D.
49) D.
50) E.
51) A.
52) E.
53) D.
54) A.
55) B.
56) E.
57) E.
58) A.
59) C.
60) D.
61) D.
62) D.
63) E.
64) A.
65) A.
66) B.
67) D.
68) B.
69) C.
70) B.
71) C.
72) C.
73) A.
74) E.
75) B.

PIERRE LUCIE

FÍSICA COM MARTINS E EU

VOLUME II

DINÂMICA DA PARTÍCULA

FASCÍCULO 2

ILUSTRAÇÕES DE

Henfil

CAPÍTULO XIV

ENERGIA

XIV-1 As grandes Leis de Conservação em Física.

Aprendemos no Capítulo XI que em qualquer interação há algo que se conserva: o momentum total do sistema.

Desde que êsse momentum seja medido em um referencial inercial.

E desde que o sistema estudado esteja isolado, ou possa ser considerado como tal.

Assim é que, naquêle Capítulo, encontramos a primeira grande Lei de Conservação da Física: a lei de Conservação do Momentum.

Nêsse Capítulo, encontraremos uma outra Lei de Conservação: a Lei de Conservação de Energia.

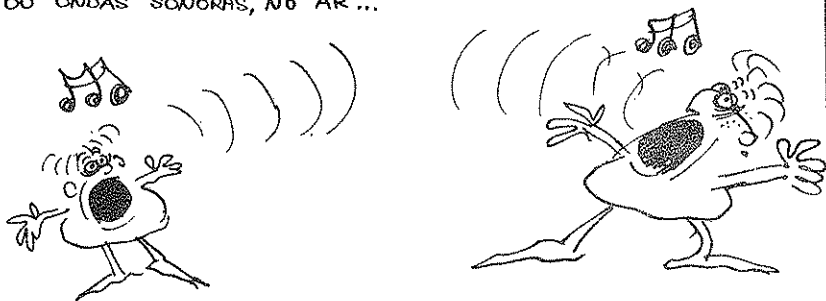
Haverá uma diferença com o momentum. O momentum (com as restrições enunciadas a respeito do referencial e do isolamento do sistema) se conserva sempre. A energia ... bem, não é tão simples assim.

É que a energia ...

PARA PREGAR UM PREGO NUMA TÁBUA VOCÊ PRECISA DISPOR DE ENERGIA MECÂNICA...

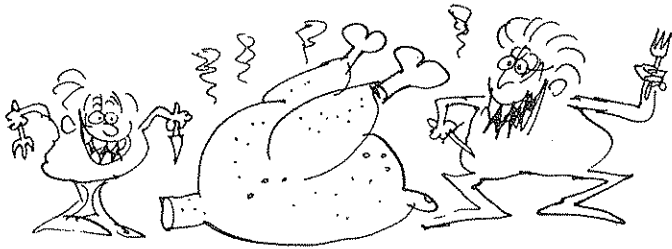
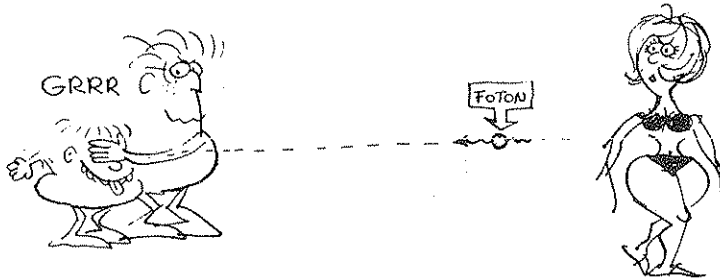
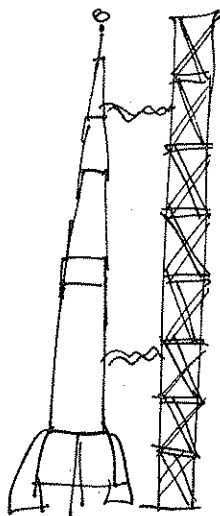
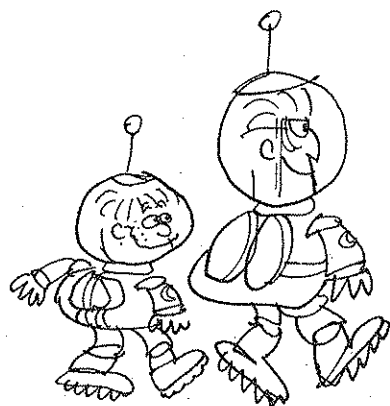
PARTE DESSA ENERGIA SERVE PARA AFASTAR AS FIBRAS DE MADEIRA... OUTRA PARTE PODE SERVIR PARA OUTROS FINS...

QUANDO VOCÊ E EU DISCUTIMOS, PRECISAMOS DE ENERGIA PARA POR NOSSAS CORDAS VOCAIS EM VIBRAÇÃO...

... PARTE DESSA ENERGIA SE TRANSMITE POR ONDAS DE PRESSÃO, OU ONDAS SONORAS, NO AR...

... OUTRA PARTE SERVE PARA IRRITAR INUTILMENTE AS DITAS CORDAS VOCAIS... SENDO ENTÃO NECESSÁRIO DISPORMOS DE MAIS ENERGIA PARA ESQUENTARMOS A ÁGUA DA INHALAÇÃO SALVADORA...

O SIMPLES FATO DE VOCÊ ESTAR VIVO, MARTINS, PARA INFERNIZAR A MINHA VIDA...

O SIMPLES FATO DE VOCÊ MANTER-SE EM PÉ, ANDAR, JOGAR PELADA...

...INDICA QUE VOCÊ DISPÕE DE RESERVAS FARTAS DE ENERGIA PARA PODER FAZER SUAS MOLECAGENS...

O FATO DE VOCÊ VER, MARTINS...

OS SATURNOS DO PROGRAMA APOLO...

... NECESSITAM TAMBÉM DE UMA RESERVA ENORME DE ENERGIA PARA ARRANCAREM EM DIREÇÃO À LUA...

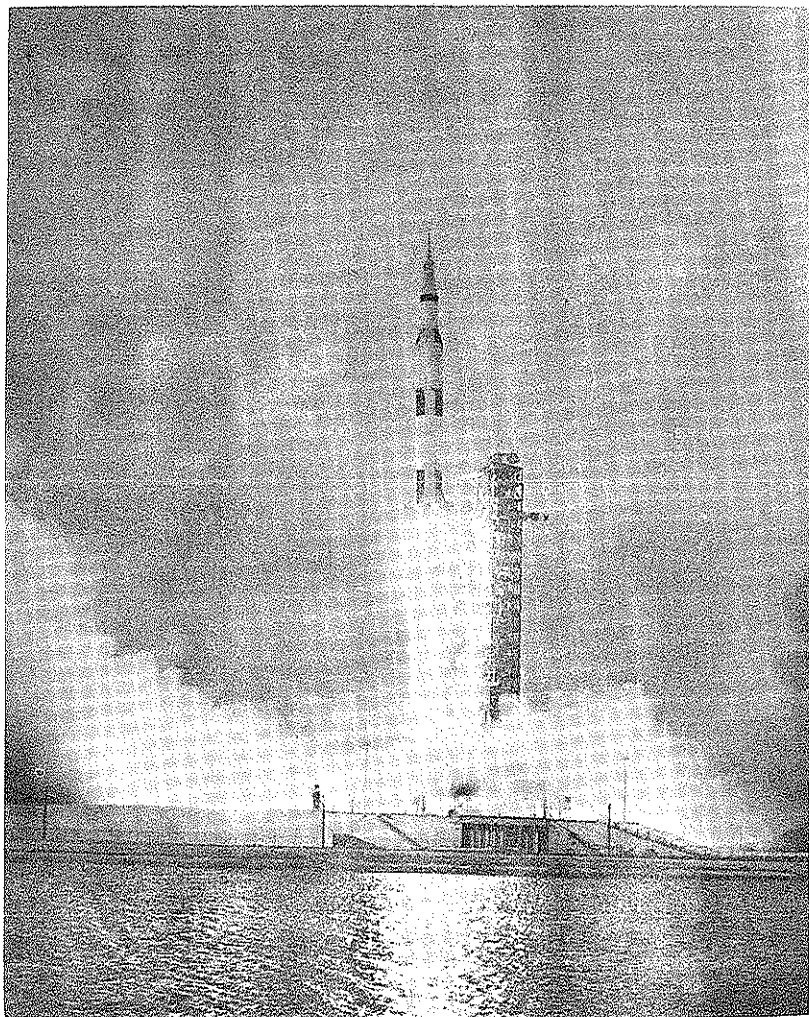
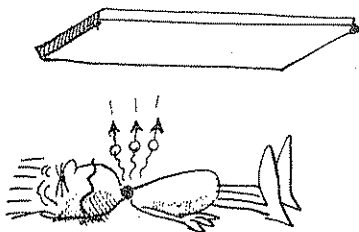



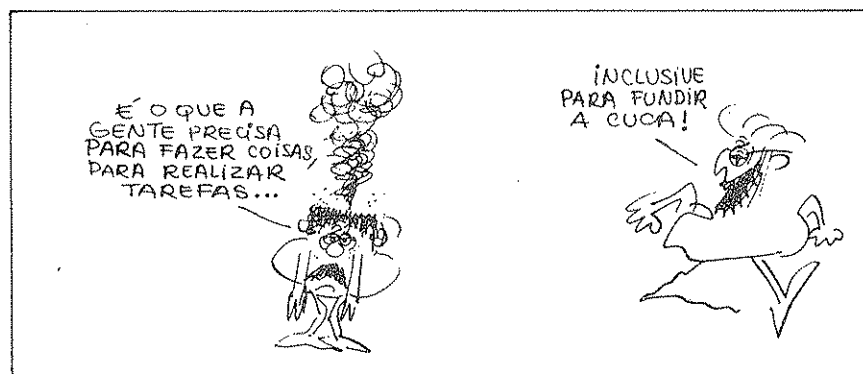
FOTO: CORTESIA NASA

COMO TAMBÉM, SE VOCÊ ESTIVESSE DOENTE DA TIRÓIDE, O SEU MÉDICO LHE DARIA POSSIVELMENTE UM ISOTOPO RADIOATIVO DO IODO, O I^{132}, PARA INGERIR...

... O IODO FIXA-SE PREFERENCIALMENTE NAS CÉLULAS AFETADAS DA TIRÓIDE.
A ENERGIA TRANSPORTADA PELA EMISSÃO GAMA DOS NÚCLEOS RADIOATIVOS IMPRESSIONA UMA CHAPA FOTOGRÁFICA, FORMANDO UMA VERDADEIRA RADIOGRAFIA DA GLÂNDULA...

... O QUE PERMITIRÁ A SEU MÉDICO ESTABELECER UM DIAGNÓSTICO!

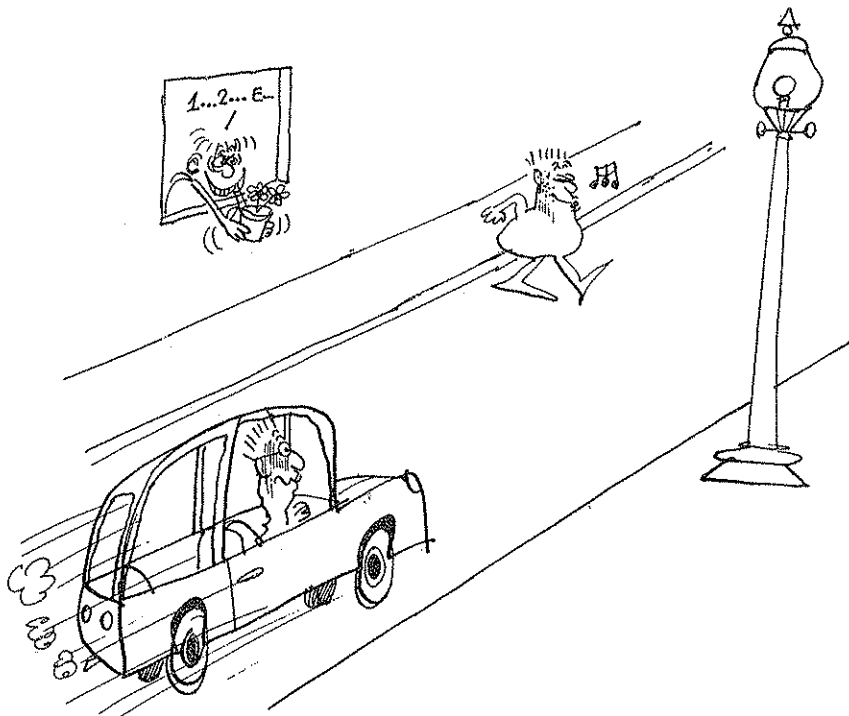
BEM MARTINS, EU SUPONHO QUE AGORA...

...VOCÊ SABE MAIS OU MENOS O QUE É ENERGIA...

É O QUE A GENTE PRECISA PARA FAZER COISAS, PARA REALIZAR TAREFAS...
¡INCLUSIVE PARA FUNDIR A CUCA!

XIV-2 A energia associada ao movimento: energia cinética.

XIV-2-1 Algumas experiências

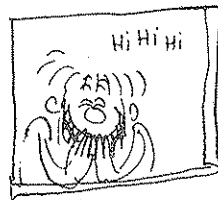
O outro dia, por uma tarde de sol, o Martins estava na janela, apreciando a paisagem... e cuidando das flôres da família.

Apareceram simultâneamente, no campo de visão do Martins, um pedestre despreocupado e um automóvel que tentou em disparada fazer a curva da esquina.

O resultado líquido da operação foi:

O carro destruído tentando subir ao poste quebrado...

...o pedestre agora muito preocupado com a dolorosa protuberância produzida na cabeça pela queda do vaso de flôres...

...o qual despedaçou-se no choque.

O único que saiu incólume, da operação foi evidentemente o Martins.

De modo que um corpo em movimento é capaz de fazer coisas, realizar tarefas...

Destruir-se, ou destruir coisas e gente, é também realizar tarefas, não é mesmo?

Costuma-se dizer que um corpo em movimento "possui" energia.

Mas não é tão simples assim. É preciso um pouco de cautela.

Voltemos por exemplo ao desastre do automóvel presenciado pelo Martins. Parece insofismável: Martins está vendo o carro precipitar-se contra o poste. Êle diz: "Minha Nossa Senhora! Êsse negócio vai quebrar tudo!".

Para o Martins, o automóvel em movimento "possuia" energia.

Mas coloquemo-nos - pelo pensamento! - no lugar do motorista; no referencial do automóvel.

Nêsse referencial, o carro está parado. Quem está em movimento é a rua, são as casas, é o poste...

Estamos vendo o poste - e a Terra - avançar contra nós a 80 km/h. Dizemos: "Cuidado que vai quebrar!"

Para nós, o poste - e a Terra - em movimento "possuem" energia. O automóvel não.

Afinal das contas quem é que "possui" energia nessa história?

Desde já então, algumas conclusões se impõem a respeito da energia de um corpo em movimento, ou <u>energia cinética</u>.

1 - Não faz sentido nenhum falar da energia cinética de um corpo fora do quadro de uma interação. É sòmente no decorrer de uma interação que energia será utilizada para realizar tarefas.

De onde virá essa energia, e como se dividirá a despesa entre os dois corpos que interagem é uma outra história; falaremos disso adiante.

2 - Massa, momentum, fôrça possuem também êsse caráter de sòmente poderem ser medidos por meio de uma interação. São grandezas dinâmicas.

Energia é também uma grandeza dinâmica.

3 - A energia cinética de um corpo depende de seu estado de movimento. Consequentemente depende do referencial em que se estuda a interação.

XIV-2-2 <u>De que parâmetros depende a energia cinética</u>?

O que é que você acha?

Heim?... Você acha que depende da massa do corpo?

Acho também: se eu quero pregar um prego pequeno em madeira macia, um martelinho a tôa basta.

Mas se eu quiser pregar um prego grosso em madeira dura, vou procurar um martelão!...

De que mais depende?

Òbviamente da velocidade. Se aquêle carro tivesse andado a 10 km/h em vez de 80, êle não teria quebrado... ou muito pouco.

Vamos ao Laboratório pesquisar isso de mais perto.

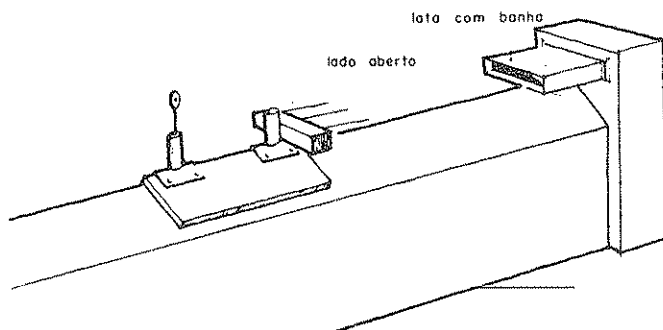



Figura XIV-1

A Fig. XIV-1 mostra a aparelhagem: um carrinho sôbre a calha de ar possui um para-choques no qual se pode fixar uma, duas ou três agulhas metálicas idênticas, de uns 20cm de comprimento.

Na extremidade da calha se encontra um bloco de madeira amarrado ao suporte da calha. Uma lata contendo banha está fixada ao bloco. A lata está a berta na face virada para a calha.

Você já percebeu, não é? Lança-se o carrinho e as agulhas penetram na banha, onde são freadas.

A banha é suficientemente homogênea para aceitarmos sem maior discussão que as fôrças de interação exercidas sôbre cada agulha são sempre i - guais entre si.

Uma experiência preliminar mostra que, lançando o carrinho com uma agulha com velocidade de aproximadamente 90cm/s, a agulha penetra de 8 cm na banha.

Muito bem. Pregar prego, nem que seja em banha, é realizar tarefa, não é? Requer energia.

Adotemos como unidade provisória de energia a energia cinética necessária para fincar aquela agulha de 8cm na banha (*).

De que depende essa energia cinética?

Eu quero dizer o seguinte: suponha que fixemos duas agulhas no carrinho, em vez de uma, e que queremos fincar ambas as agulhas de 8cm.

Õbviamente, precisaremos do dôbro da energia necessária na primeira experiência, ou seja, 2 unidades arbitrárias.

E fixando as três agulhas, para fazê-las penetrar de 8cm, precisaremos do triplo da energia inicial, ou seja, 3 unidades arbitrárias.

De acôrdo?

Bem! Vimos que a energia cinética depende da massa do corpo. Como é que eu devo variar a massa, conservando sempre a mesma velocidade, para do - brar, ou triplicar, a energia cinética do carrinho?

(*) Tudo isto está ótimo, e nessa altura vai nos ajudar a entender o conceito de energia. Mas na realidade a quantidade de energia necessária para fazer penetrar a agulha de 8, ou 10, ou 20cm na banha depende da maneira de operar, e em particular da velocidade da agulha. Não importa para agora, e logo mais nos livraremos dêsse vínculo incômodo!

Eu vou deixar você matutar isso por uns cinco minutos.
Enquanto isso, vou tomar um cafèzinho com o Martins.
Está servido?

Como é moçada? Já concluiram?

Como? Ótimo! Se eu quiser fincar duas agulhas de 8cm, é só utilizar dois carrinhos idênticos com uma agulha cada, não é mesmo?

Ou utilizar um carrinho com duas agulhas, mas com o dôbro da massa...

E se eu quiser fincar três agulhas de 8cm, é só utilizar três carrinhos idênticos com uma agulha cada.

Ou utilizar um carrinho com três agulhas, mas com o triplo da massa...

De modo que a energia cinética é proporcional à massa do corpo em movimento.

Vamos ser honestos.
O raciocínio precedente foi simplificado pelo fato que, terminada a interação, o carrinho se encontra em repouso no Laboratório. Concluímos implìcitamente que a energia necessária para fincar as agulhas proveio da energia cinética, e que tôda essa energia cinética foi utilizada. Caso contrário, seria um pouco mais complicado, mas o resultado seria o mesmo.

E agora, qual é a relação entre energia cinética e velocidade?

Para decidir a parada, fiz as três experiências seguintes:

<u>PRIMEIRA EXPERIÊNCIA</u>: Carrinho com uma agulha - Penetração: 8,2 cm. Energia necessária: 1 u.a.

O gráfico <u>s</u> vs <u>t</u>, registrado pela máquina giratória, está reproduzido abaixo.

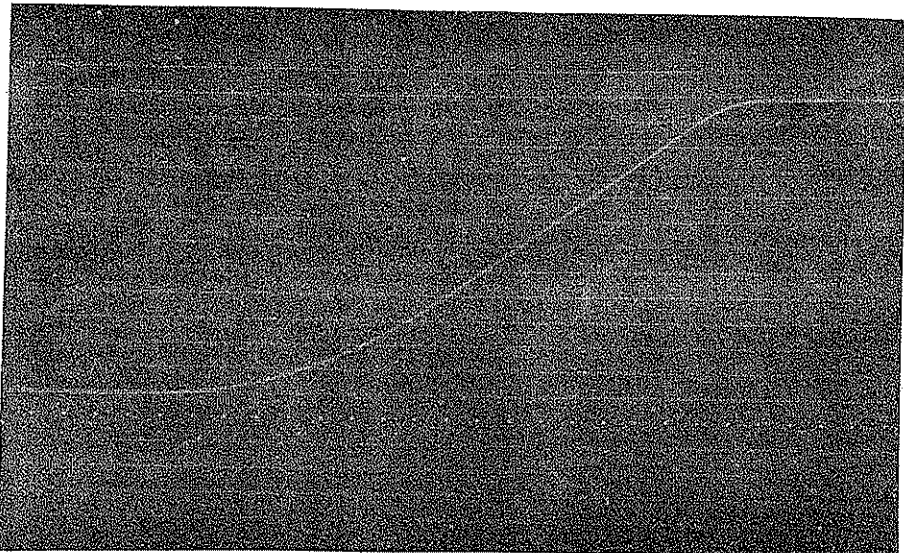



Figura XIV-2

A análise do gráfico mostra que antes da agulha penetrar na banha, a velocidade do carrinho era 89cm/s.

Como você vai fazer o problema XIV-1, eu dou sòmente os resultados. Você terá oportunidade de verificá-los.

SEGUNDA EXPERIÊNCIA: Carrinho com duas agulhas, mas com a mesma massa total que na primeira experiência. Depois de várias tentativas, consegui a velocidade necessária para que a penetração das agulhas seja ainda 8,2cm. Energia necessária: 2 u.a.

O gráfico s vs t está reproduzido abaixo:

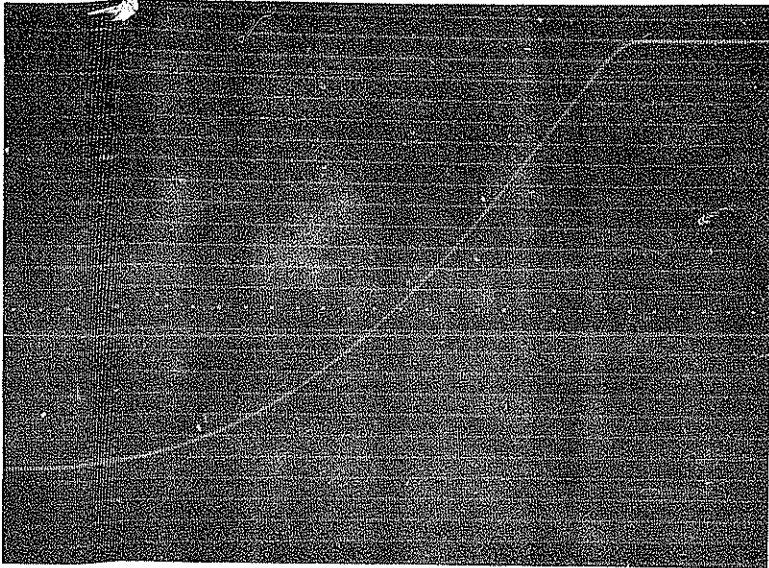



Figura XIV-3

Velocidade antes da interação: 125 cm/s.

<u>TERCEIRA EXPERIÊNCIA</u>: Carrinho com três agulhas, mas com a mesma massa total que na primeira experiência. Consegui também a velocidade necessária para que a penetração das agulhas seja de novo 8,2cm. Energia necessária: 3 u.a.

O gráfico <u>s</u> vs <u>t</u> está reproduzido abaixo:

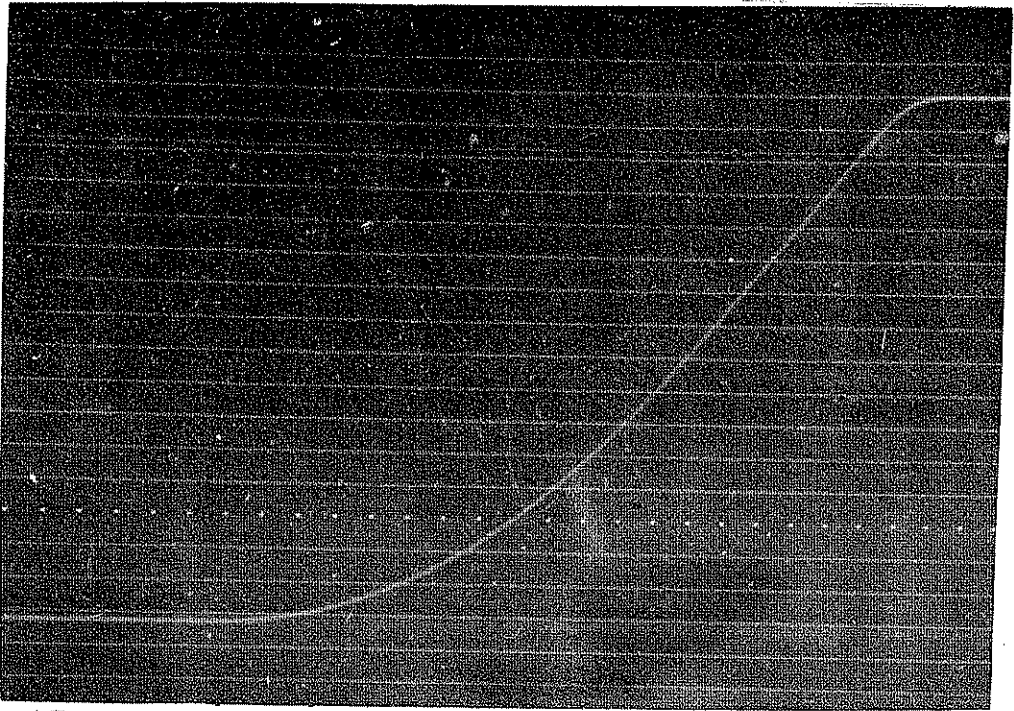



Figura XIV-4

Velocidade antes da interação: 152 cm/s.

Resumamos tudo isto. E lembre-se que a energia necessária para realizar a "operação-agulha" provém da energia cinética do carrinho antes da interação (*).

Bem, então vamos à nossa tabela:

TABELA XIV-1

	Energia necessária	Massa do Carrinho	Velocidade
Exp. nº 1	1 u.a.	1 u.a.	89cm/s
Exp. nº 2	2 u.a.	1 u.a.	125cm/s
Exp. nº 3	3 u.a.	1 u.a.	152cm/s

Qual é a relação entre a energia por um lado, e a velocidade do carrinho antes da interação por outro lado?

Bem, à primeira vista, não vejo nada de extraordinário...

(*) Mais uma vez - veja de novo, se necessário, o rodapé da pág. 391 -, isto é sòmente aproximado. Mas a aproximação é excelente, na faixa das velocidades utilizadas.

Mas como, nessa altura, já aprendi a respeitar os palpites do Martins, elevo as velocidades ao quadrado, e dá o seguinte:

TABELA XIV-2

	Energia necessária (u.a.)	Massa do Carrinho (u.a.)	Velocidade v cm/s	v^2 $(cm/s)^2$
Exp. nº 1	1	1	89	$7,9 \times 10^2$
Exp. nº 2	2	1	125	$15,6 \times 10^2$
Exp. nº 3	3	1	152	$23,1 \times 10^2$

E veja só!

Com aproximação melhor que uma parte em cem, o quadrado da velocidade do carrinho na segunda experiência, é o dôbro do quadrado da velocidade na primeira experiência.

E a energia necessária na segunda experiência é o dôbro da energia necessária na primeira.

Da mesma forma, o quadrado da velocidade na terceira experiência é o triplo do quadrado da velocidade na primeira, com aproximação melhor que três partes em cem.

E a energia necessária na segunda experiência é o triplo da energia necessária na primeira.

De modo que, na precisão das experiências, podemos concluir que:

a energia cinética é proporcional ao quadrado da velocidade do corpo em movimento.

> Você poderá argumentar e talvez não sem razão, que construir ciência sôbre experiências em que a precisão é da ordem de 3 a 5% é um pouco ousado...
>
> Respondo:
>
> 1- não estou construindo Ciência, obviamente. Estou tentando lhe apresentar uma reconstrução razoável de um edifício velho de uns trezentos anos.
>
> Tranquilize-se. Outras experiências mais precisas confirmariam o nosso "palpite".
>
> 2- e ao entrar no mérito da questão, muita Ciência - e da bôa - já foi construída a partir de dados iniciais muito menos precisos...
>
> Mas uma vez dado o palpite, deve ser criticado, honestamente, à luz de outras experiências.

Juntando o resultado relativo a massa com o relativo à velocidade, diremos que:

A ENERGIA CINÉTICA DE UM CORPO EM MOVIMENTO, EM DETERMINADO REFERENCIAL, É PROPORCIONAL AO PRODUTO DA MASSA DO CORPO PELO QUADRADO DE SUA VELOCIDADE.

E representando a energia cinética pelo símbolo E_c, escrevemos

$$E_c = k\,mv^2 \qquad \text{(XIV-1)}$$

k é um coeficiente de proporcionalidade que deve ser um número puro. Com efeito, fìsicamente, acho difícil essa energia depender de outra coisa que não seja a massa e a velocidade.

De modo que o problema...

XIV-2-3 Quanto vale êsse k?

Estamos tentando desenvolver o conceito de energia cinética, da energia associada ao movimento.

Descobrimos experimentalmente que um corpo em movimento, ao parar, é capaz de realizar tarefas.

E descobrimos também que a ... "quantidade" de tarefas assim realizável é proporcional à massa e ao quadrado da velocidade do corpo.

O que nos permitiu escrever $E_c = kmv^2$.

Mas quanto vale êsse k?...

Não sei... ainda há tantas perguntas no ar...

Por exemplo: se o carrinho não parasse depois da interação? Como é que se comparariam as energias cinéticas antes e depois?

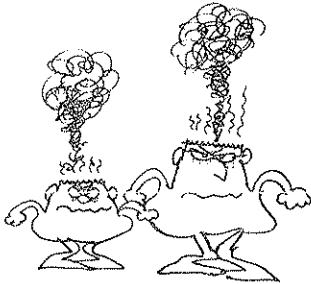
E mais: o valor da energia cinética depende do referencial escolhido. Então eu posso dar à energia cinética de um corpo o valor que eu quiser.

É só mudar de referencial.

E não é só isso. Desde o início, quando aquêle carro espatifou - se contra o poste, percebemos que ao mudarmos de referencial podíamos até anular a energia cinética do carro... e realizar a "tarefa" com a energia cinética da Terra! (Ou pelo menos com parte dela).

De modo que êsse negócio de energia cinética de um corpo, ou de uma partícula, é meio artificial, não acha?

Ah! o Martins está começando a ficar impaciente...

RACIOCINEMOS!

 Uma tarefa sòmente pode realizar-se no decorrer de uma interação.

 A energia necessária para a realização dessa tarefa deve necessàriamente independer do referencial escolhido para estudar a interação.

(3) Consequentemente, devemos procurar algo que, numa interação, PERMANECE INVARIANTE NUMA MUDANÇA DE REFERENCIAL E QUE SEJA FUNÇÃO DOS PRODUTOS mv^2 ASSOCIADOS ÀS PARTÍCULAS QUE INTERAGEM, antes e depois da interação.

Vamos então nos armar de coragem e estudar o que acontece numa interação entre duas partículas, estudando-a em um referencial qualquer.

A Fig. XIV-5 representa os gráficos v vs t de uma interação entre uma partícula (1), de massa m_1, e outra partícula (2), de massa m_2.

A interação é estudada em um referencial inercial.

Para simplificar os cálculos, eu supus que durante a interação as acelerações são constantes.

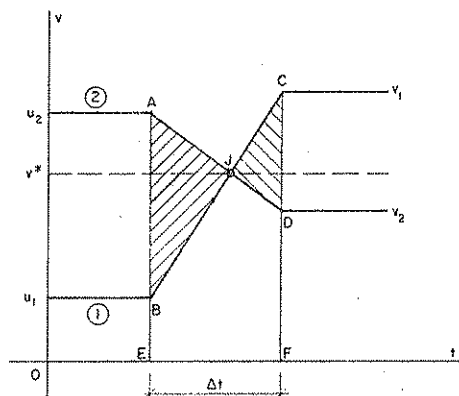



Figura XIV-5

As velocidades antes da interação são respectivamente $\underline{u_1}$ e $\underline{u_2}$. Elas passam para os valores $\underline{v_1}$ e $\underline{v_2}$ depois da interação.

A velocidade do centro de massa é $\underline{v^*}$; vimos isso no Capítulo XII.

Calculemos sucessivamente:

a) a fôrça que age sôbre a partícula (1). Essa fôrça é:

$$F_1 = m_1 \frac{v_1 - u_1}{\Delta t} \qquad \text{(XIV-2)}$$

b) a variação Δs_1 da posição da partícula (1) durante a interação:

$$\Delta s_1 = \frac{1}{2} (v_1 + u_1)\Delta t \qquad \text{(XIV-3)}$$

c) o produto $F_1 \, . \, \Delta s_1$:

$$F_1 \, . \, \Delta s_1 = m_1 \frac{v_1 - u_1}{\Delta t} \, . \, \frac{1}{2} (v_1 + u_1)\Delta t$$

$$F_1 \, . \, \Delta s_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \qquad \text{(XIV-4)}$$

Sejamos honestos...

1) Calculei logo o produto $F.\Delta s$ porque eu sabia que ia dar certo!... Você poderia ter estranhado de ver cair is<u>to</u>... do céu!

2) E quando eu digo "que ía dar certo", ainda não deu, mas quase.

De qualquer maneira, a expressão (XIV-4) é uma função dos produtos mu_1^2 (antes) e mv_1^2 (depois), para a partícula (1).

O chato é que não é invariante. Mas espere um pouco!...

E repitamos os mesmos cálculos para a partícula (2). É só substituir os índices 1 por 2.

a) $F_2 = m_2 \dfrac{v_2 - u_2}{\Delta t}$ (XIV-5)

b) $\Delta s_2 = \dfrac{1}{2} (v_2 + u_2)\Delta t$ (XIV-6)

c) $F_2 . \Delta s_2 = \dfrac{1}{2} m_2 v_2^2 - \dfrac{1}{2} m_2 u_2^2$ (XIV-7)

Muito bem! Nenhuma das expressões (XIV-4) e (XIV-7) é invariante numa mudança de referencial.

Mas somemos:

$$F_1 . \Delta s_1 + F_2 . \Delta s_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad \text{(XIV-8)}$$

E para arrumar um pouco essa expressão, lembre-se primeiro que F_1 e F_2 são iguais e opostos (ação e reação!) e que no Capítulo XII, convencionamos chamar força de interação ao valor comum dos módulos de F_1 e F_2, com o sinal positivo se a interação fôr repulsiva, e com o sinal negativo se a interação fôr atrativa.

No caso da Fig. XIV-5 a interação é repulsiva. Representando por F a fôrça de interação temos então

$$F = F_1 = - F_2$$

Substituindo na expressão (XIV-8):

$$F(\Delta s_1 - \Delta s_2) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad \text{(XIV-9)}$$

E vejamos juntos, na Fig. XIV-5, o que representa a diferença

$$(\Delta s_1 - \Delta s_2).$$

Δs_1 é representado pela área do trapézio EBCF.

Δs_2 é representado pela área do trapézio EADF.

De modo que a diferença $(\Delta s_1 - \Delta s_2)$ é representado pela diferença entre a área do triângulo CJD e a do triângulo AJB. Não é mesmo? Veja, é fisi

camente muito simples.

Em qualquer interação repulsiva as duas partículas começam por se a proximar uma da outra. Isso se produz evidentemente enquanto a velocidade da partícula (2), no caso estudado, fôr maior que a velocidade da partícula (1). Nessa fase a distância entre as partículas diminui de uma quantidade propor - cional à área do triângulo AJB.

A partir daí, as partículas podem continuar juntas - como no caso do carrinho, da Terra, e da lata com banha - ou podem separar-se de novo. Nês se último caso, a velocidade da partícula (1) passa a ser maior que a velocidade da partícula (2), e a distância entre as partículas aumenta de novo, depois de ter passado pelo seu valor mínimo.

Aumenta de quanto? De algo proporcional à área do triângulo CJD.

De modo que, no decorrer da interação, a distância r entre as partí culas começa por diminuir para aumentar (eventualmente) a seguir.

De quanto varia r?

De $\Delta r = \Delta s_1 - \Delta s_2$.

E, obviamente, Δr é invariante numa mudança de referencial.

É fìsicamente evidente: a distância entre as partículas independe do referencial escolhido para medí-la.

E é também evidente na Figura XIV-5: Δr é proporcional à diferença entre as áreas dos triângulos CJD e AJB. Ora, uma mudança de referencial muda simplesmente o eixo dos tempos do gráfico v vs t. Isso não altera as áreas dos triângulos. Não altera portanto o valor de Δr.

Muito bem. Voltemos à expressão (XIV-9). Ela se escreve:

$$F.\Delta r = (\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2) - (\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2) \qquad \text{(XIV-10)}$$

E analisemos.

O primeiro membro é o produto da fôrça de interação pela variação da distância entre as partículas. Êsse produto é invariante numa mudança de referencial.

O segundo membro é a diferença entre o valor final e o valor ini - cial da soma:

$\frac{1}{2}$. massa.(velocidade)^2 da partícula (1).

+

$\frac{1}{2}$. massa.(velocidade)^2 da partícula (2).

Mas não é isso mesmo que estávamos procurando?

Se a soma $\Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2$ tiver, depois da interação, um valor menor que antes da interação, houve energia gasta, durante a interação, para realizar uma tarefa.

E o valor dessa energia é medido pelo invariante F.Δr.

De modo que, para resumir de maneira coerente o que precede, definiremos a energia cinética de uma partícula em determinado referencial por

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \qquad \text{(XIV-11)}$$

No decorrer de uma interação entre um par isolado de duas partículas, em um referencial inercial, a energia cinética final do sistema pode ser diferente do seu valor inicial.

Se a energia cinética final fôr menor que a energia cinética inicial, houve energia disponível, durante a interação, para realizar tarefas.

A quantidade de energia disponível é medida pelo produto F.Δr em que F é o valor algébrico da fôrça de interação e Δr a variação da distância entre as partículas:

$$F.\Delta r = \Delta(\Sigma \frac{1}{2} mv^2) \qquad \text{(XIV-12)}$$

Uma observação antes de passarmos a um outro assunto.

A expressão (XIV-12): "trabalho = variação da energia cinética do sistema" é válida qualquer que seja o intervalo de tempo considerado. Pode ser a interação tôda, ou parte dela.

Para chegar àquela expressão, eu supus que a fôrça de interação era constante.

E se não fôr, como é quase sempre o caso?

Se não fôr, você terá que tomar algumas precauções. Mas nada de dramático!

Divida mentalmente a variação total da distância entre as partículas (durante o intervalo de tempo que lhe interessa) em sub-intervalos tão pequenos que a fôrça de interação seja, nêsses intervalozinhos, pràticamente constante; e calcule (mentalmente) o trabalho em cada um dos sub-intervalos, igualando-o à variação correspondente da energia cinética:

$$F_1.\Delta r_1 = \Delta(E_c)_1$$

$$F_2.\Delta r_2 = \Delta(E_c)_2$$

......

E assim por diante.

A seguir, some.

No segundo membro, terá a variação <u>total</u> da energia cinética do sistema, no intervalo todo em que você quer calculá-la.

No primeiro membro...

Bem, no primeiro membro você terá algo proporcional à <u>área debaixo da curva F vs r</u>.

Pois não é exatamente o mesmo processo que nos levou em Cinemática, por exemplo, a obter a variação Δs da posição de uma partícula a partir do gráfico <u>v</u> vs <u>t</u>, heim?

Tínhamos: Δs = (área debaixo da curva <u>v</u> vs <u>t</u>).

Temos agora: $\Delta(E_c)$ = (área debaixo da curva <u>F</u> vs <u>r</u>).

Você encontrará um exemplo disso na Seção XIV-4-2 (Exemplo 1).

E não esqueça, a propósito, de fazer os Problemas XIV-4 a XIV-7!

XIV-2-4 Trabalho-Unidade de energia: o Joule.

A expressão F.Δr é chamada trabalho da fôrça de interação. O trabalho se representa pelo símbolo W.

$$W = F.\Delta r \qquad \text{(XIV-13)}$$

Fìsicamente, o trabalho mede a quantidade de energia utilizada para realizar tarefas, no decorrer de uma interação.

E nêsse ponto, o Martins entrou de novo no circuito...

O IMPULSO MEDE A TRANSFERÊNCIA DE MOMENTUM DE UMA PARTÍCULA PARA OUTRA...

MAS IMPULSO NÃO QUEBRA NECESSARIAMENTE NADA...
PUF!

A TERRA E VOCÊ ACABAM DE TROCAR OS SEUS MOMENTUS E APARENTEMENTE NADA QUEBROU...
MAS O TRABALHO DA FÔRÇA DE INTERAÇÃO MEDIU A VARIAÇÃO DE ENERGIA CINÉTICA DO SISTEMA TERRA-EU. QUAL FOI A TAREFA REALIZADA?

PRINCIPALMENTE A DEFORMAÇÃO DO COLCHÃO DE VULCASPUMA. DEFORMAÇÃO TEMPORÁRIA... O COLCHÃO VOLTOU À SUA FORMA PRIMITIVA...

É MESMO!

MAS PODE HAVER DEFORMAÇÕES PERMANENTES...

Mas onde é que estávamos?

Ah! sim... Estávamos no trabalho da fôrça de interação.

A expressão do trabalho pelo produto F.Δr permite definir a unidade de energia.

Diremos: "Se, durante uma interação, a fôrça de interação é de um Newton, e se a distância entre as partículas varia de um metro, então houve uma unidade de energia cinética perdida (ou ganha) pelo sistema".

A essa unidade, dá-se o nome de Joule. Um Joule é igual a um Newton.metro.

Podemos agora medir energias cinéticas.

Exemplo 1: Um automóvel trafega a 72km/h, ou seja, a 20m/s. A massa do automóvel é $8{,}0 \times 10^2$kg. A energia cinética do automóvel (no referencial terrestre em que estamos medindo a velocidade) é $\frac{1}{2} \cdot 8{,}0 \times 10^2 \cdot (20)^2 = 1{,}6 \times 10^5$J.

Exemplo 2: No seu tubo de televisão os elétrons que saem do canhão em direção da tela têm uma energia cinética de $2{,}4\times10^{-15}$ Joule. Qual é a velocidade dos elétrons?

A massa de um elétron é $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.

A velocidade é $v = \sqrt{\dfrac{2E_c}{m}}$. Substituindo, temos

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-15}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 0{,}73 \cdot 10^{8}\,\text{m/s}$$

Essa velocidade é aproximadamente 1/4 da velocidade da luz.

O exemplo precedente lhe dá uma idéia da velocidade dos elétrons no tubo de seu aparelho de televisão.
O cálculo feito é razoàvelmente válido porque a energia dos elétrons é pequena em comparação com a quantidade 80×10^{-15} J que representa a energia em repouso da partícula.
Como? A energia em repouso é um conceito relativista. Paciência!..
Mas se a energia fôsse sensìvelmente maior, a velocidade não poderia calcular-se dessa maneira.
No exemplo acima, o cálculo certo (relativista) fornece $0{,}72\times10^{8}$ m/s.

Exemplo 3: Voltemos às experiências com carrinhos, agulhas e banha do início do Capítulo.

Na primeira experiência (gráfico da Fig. XIV-2), a massa do carrinho era 0,46kg e sua velocidade antes da interação, 0,89m/s. A energia cinética antes da interação era

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 0{,}46.(0{,}89)^2 = 0{,}18J.$$

No final da interação a energia do carrinho (e da Terra), é nula no Laboratório.

Durante a interação a energia cinética do sistema carrinho-Terra variou portanto de

$$\Delta E_c = -\,0{,}18J.$$

Durante a interação, a aceleração do carrinho foi de $5{,}15m/s^2$ (em valor absoluto).

A fôrça de interação, positiva por ser repulsiva, foi:

$$F = 0{,}46.5{,}15 = 2{,}36N$$

A agulha penetrou de 8,2cm na banha: $\Delta r = -8{,}2.10^{-2}m$ (Você entendeu a razão do sinal negativo?)

O trabalho de interação foi:

$$W = -2{,}36.8{,}2x10^{-2} = -0{,}19J.$$

Compare W com ΔE_c. O que é que você acha?

XIV-2-5 Uma outra unidade de energia: o elétron-volt.

Em Física atômica e em Física nuclear, o Joule é muito pouco utilizado.

Você vê, o Joule e uma unidade "humana" por assim dizer... Em qualquer apêrto de mãos as fôrças exercidas são da ordem do Newton.

E o metro é "humano" por excelência.

Mas isso é muito pouco prático para o mundo do muito pequeno.

A unidade utilizada passa a ser o elétron-volt. A correspondência entre o elétron-volt e o Joule lhe será ensinada no curso de Eletricidade.

Ela é:

$$1 \text{ ev} = 1,6 \; . \; 10^{-19} \text{J} \qquad \text{(XIV-14)}$$

Os múltiplos mais comuns são:

- o quilo-elétron-volt (Kev): 1 Kev = 10^3 ev.
- o mega-elétron-volt (Mev): 1 Mev = 10^6 ev.
- o giga-elétron-volt (Gev ou Bev): = 1 Bev = 10^9 ev.

Exemplo 1: O elétron-volt é a energia cinética adquirida por um elétron "caindo" de 1 volt.

No Exemplo 2 da Seção precedente, eu supus que a tensão aceleradora era 15KV (quilo.volt). A energia dos elétrons ao saírem do canhão era portanto 15 Kev, ou seja $15 \text{x} 10^3 \; . \; 1,6 \; . \; 10^{-19} = 2,4 \; . \; 10^{-15}$J.

Exemplo 2: Os maiores aceleradores atualmente em serviço permitem acelerar elétrons até energias de 25 Bev.

Isso representa $4,0.10^{-9}$J.

Compare com a energia cinética de um alfinête caindo de 1cm.

Vamos lá! A massa do alfinête é $1,0.10^{-4}$kg. Seu pêso é $1,0.10^{-3}$N.

Essa é também a fôrça de interação. Ao cair o alfinête de 1cm, o trabalho dessa fôrça é $W = 1,0.10^{-3}.1,0\text{x}10^{-2} = 1,0.10^{-5}$J.

Êsse trabalho mede a variação da energia cinética do sistema alfinête-Terra. Como a energia cinética da Terra é desprezível (verifique se quiser; voltaremos a tratar do assunto daqui a pouco), a energia do alfinête é $1,0.10^{-5}$J.

Ou seja, duas mil e quinhentas vêzes a energia comunicada aos elétrons pelas maiores máquinas.

XIV-2-6 Decomposição do trabalho da fôrça de interação.

A expressão (XIV-10), que eu vou repetir a seguir, nos fornece o trabalho da fôrça de interação:

$$F.\Delta r = \{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\} - \{\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2\} \qquad \text{(XIV-10)}$$

Vamos enunciar outra vez,.. não faz mal para ninguém!

"O TRABALHO DA FÔRÇA DE INTERAÇÃO É IGUAL A VARIAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TOTAL DO SISTEMA DURANTE O INTERVALO DE TEMPO EM QUE SE CALCULA O TRABALHO"

Mas aquela relação (XIV-10) era uma consequência da (XIV-8). Aí vai ela:

$$\underset{(1)}{F_1.\Delta s_1} + \underset{(2)}{F_2.\Delta s_2} = \underset{(1)}{\{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2\}} + \underset{(2)}{\{\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2\}} \qquad \text{(XIV-8)}$$

As relações (XIV-4) e (XIV-7) nos disseram por sua vez que a expressão (1) do primeiro membro é igual à expressão (1) do segundo:

$$F_1.\Delta s_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2$$

Mas $F_1.\Delta s_1$ não é o trabalho da fôrça que age sôbre a partícula (1)?

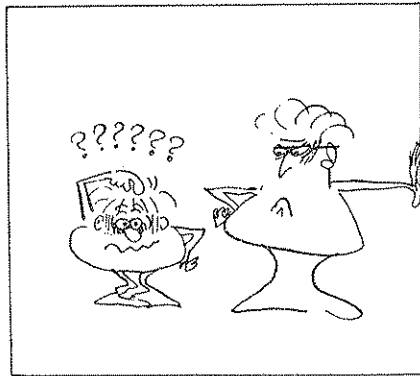
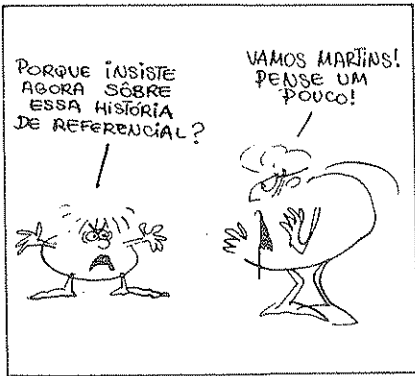
E $(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2)$ não é a variação correspondente da energia cinética dessa partícula?

É. E da mesma forma,

$$F_2 . \Delta s_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

De maneira que o trabalho da fôrça de interação pode ser considerado como sendo a soma dos trabalhos das fôrças que agem sôbre as partículas que interagem.

E o trabalho da fôrça que age sôbre uma partícula é igual à variação da energia cinética da partícula, no referencial em que está calculado o trabalho.

MARTINS E EU

Exemplo: Um pedaço de pano está sôbre uma mesa bem encerada. Você lança horizontalmente uma caixa de fósforos sôbre o pano. Ela desliza inicialmente sôbre a fazenda, sendo freada por uma fôrça de atrito (entre a caixa e o pano) de 0,10N.

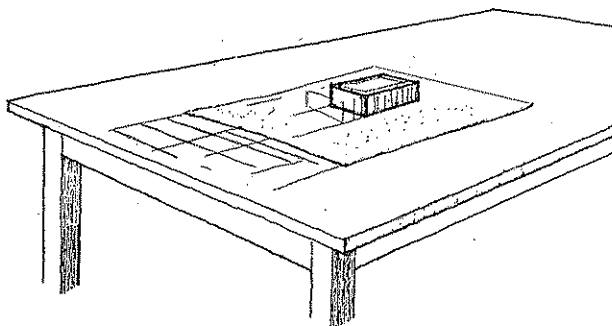



Figura XIV-6

Finalmente a caixa entra em repouso em relação ao pano, mas o conjunto caixa-pano está agora em movimento sôbre a mesa.

Pede-se calcular:

1) a velocidade do conjunto caixa-pano logo depois da caixa entrar em repouso em relação ao pano.
2) a energia cinética inicial, a energia cinética final, e a variação da energia cinética do sistema durante a interação.
3) o trabalho da fôrça de interação.
4) os trabalhos individuais das fôrças que agem respectivamente sôbre a caixa e sôbre o pano.

Dados: massa da caixa e massa do pano = 10g.
velocidade inicial da caixa = 2,0m/s.

Construamos primeiro o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ da interação, supondo-se que o atrito entre o pano e a mesa é desprezível em comparação com as fôrças de interação caixa-pano.

É o gráfico representado ao lado.

Está de acôrdo?

Por quê razão as velocidades variam linearmente durante a interação?

Certo! Porque a fôrça de atrito entre o pano e a caixa é suposta constante.

Então: antes da interação o pano está em repouso no Laboratório (referencial inercial!), e a caixa está com velocidade de 2,0m/s.

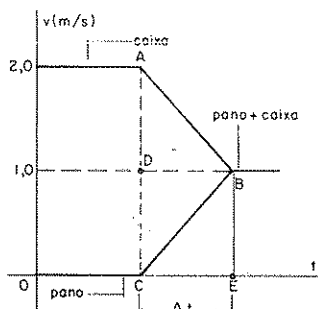



Figura XIV-7

Começa a interação: o pano é acelerado pela fôrça de atrito exercida pela caixa sôbre êle.

E a caixa é decelerada pela fôrça de atrito exercida pelo pano sôbre ela.

Essas duas fôrças de atrito são iguais em módulos e de sentidos contrários (3ª Lei de Newton).

Quando a velocidade do pano se iguala à velocidade da caixa, as fôrças de atrito se anulam juntas: atrito sôbre um plano horizontal sòmente existe enquanto existir velocidade relativa.

O conjunto pano-caixa continua então com a velocidade do centro de massa do sistema.

Ótimo! Vamos agora à solução do problema.

1) As massas são iguais. O gráfico v vs t mostra logo que a velocidade do centro de massa é 1,0m/s. É a velocidade do conjunto.

Formalmente, você escreveria a conservação do momentum (lembre-se que êle se conserva sempre, em qualquer tipo de interação):

$$m_c u_c + m_p u_p = (m_c + m_p) v^*$$

$$0{,}010 \; . \; 2{,}0 + 0{,}010 \; . \; 0 = 2 \; . \; 0{,}010 \; v^*$$

$$v^* = 1{,}0 m/s$$

2) $(E_c)_{antes} = \frac{1}{2} m_c u_c^2$ (a energia cinética do pano é nula).

$$(E_c)_{depois} = \frac{1}{2} (m_c + m_p) v^{*2}$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} (m_c + m_p) v^{*2} - \frac{1}{2} m_c u_c^2$$

Numèricamente:

$$(E_c)_{antes} = \frac{1}{2} \; . \; 0{,}010 \; . \; (2{,}0)^2 = 0{,}020 \; J$$

$$(E_c)_{depois} = \frac{1}{2} (0{,}010 + 0{,}010) \; . \; (1{,}0)^2 = 0{,}010 \; J$$

$$\Delta E_c = 0{,}010 - 0{,}020 = -0{,}010 \; J$$

A energia cinética total diminuiu durante a interação: houve **"coisas"** realizadas. Se você quiser saber quais, esfregue com a mão qualquer superfície ... com maior vigor! O que está sentindo? A temperatura da mão (e da superfície) aumentou.

Pois é: o atrito entre a caixa e o peno aqueceu a caixa, e o pano. Muito pouco talvez, mas aqueceu.

3) Calculemos o intervalo de tempo Δt da interação. Se a fôrça de interação é 0,10N, e a massa do pano, $10g = 1,0.10^{-2}kg$, a aceleração do paño é $\frac{0,10}{1,0 \times 10^{-2}} = 10m/s^2$, em valor absoluto.

No triângulo CDB da Fig. XIV-7, $\frac{CD}{DB} = 10$, ou seja, $\frac{1,0}{\Delta t} = 10$, de modo que $\Delta t = 0,10s$.

A área do triângulo ABC é proporcional a Δr, em valor absoluto:

$|\Delta r| = \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 0,10 = 0,10m$

Mas a distância pano-caixa diminui durante a interação. $\underline{\Delta r}$ é negativo:

$$\Delta r = -0,10 \text{ m}.$$

A interação é repulsiva: $F = 0,10N$.

O trabalho da fôrça de interação é:

$$W = F.\Delta r = 0,10.(-0,10) = -1,0 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

4) A fôrça que age sôbre a caixa é F_1, negativa (Fig. XIV-8):

$$F_1 = -0,10N$$

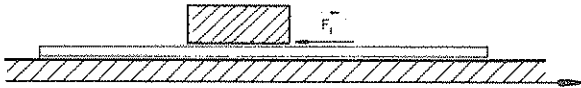



Figura XIV-8

A variação da posição da caixa, durante a interação, é proporcional à área do trapézio ABEC da Fig. XIV-7:

$$\Delta s_1 = \frac{1}{2}(1,0 + 2,0)0,10 = 0,15 \text{ m}.$$

O trabalho da fôrça F_1 é:

$$W_1 = F_1.\Delta s_1 = (-0,10).0,15 = -1,5.10^{-2} \text{ J}.$$

A fôrça F_2 que age sôbre o pano é positiva e igual a 0,10N ($3^{\underline{a}}$ Lei)

A variação da posição do pano, durante a interação, é proporcional à área do triângulo CBE:

$$\Delta s_2 = \frac{1}{2} \cdot 1,0.0,10 = 5.10^{-2} m$$

O trabalho da fôrça F_2 é:

$$W_2 = F_2.\Delta s_2 = 0,10.5.10^{-2} = 0,5 \times 10^{-2} \text{ J}.$$

Você verifica que o trabalho total calculado em 3) é efetivamente igual à soma dos trabalhos das fôrças que agem sôbre os dois corpos que interagem:

$$W_1 + W_2 = -1,5.10^{-2} + 0,5.10^{-2} = -1,0.10^{-2} J = W.$$

XIV-2-7 Energia cinética em função do momentum.

A expressão da energia cinética de uma partícula de massa m e cuja velocidade é v é:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2.$$

Mas, sendo o momentum p = mv,

$$\boxed{E_c = \frac{p^2}{2m}} \qquad \text{(XIV-15)}$$

É muitas vêzes mais conveniente utilizar essa expressão que o convencional $\frac{1}{2} mv^2$.

Exemplo:

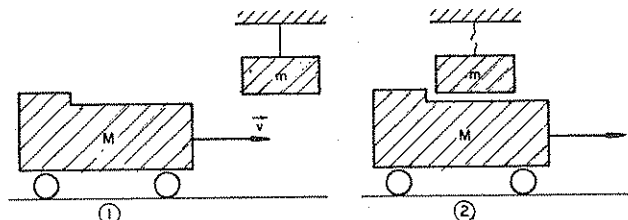



Figura XIV-9

Quando o carrinho da figura (massa M, velocidade v) passa debaixo do tijolo suspenso (massa m), corta-se o fio de suspensão.

O tijolo cai sôbre o carrinho, que o arrasta junto graças à saliência da extremidade esquerda.

De quanto variou a energia cinética do sistema durante a interação? (Despreze o atrito entre o carrinho e a mesa).

O referencial é o Laboratório. Antes da interação, o momentum do sistema é $p = Mv$ (momentum do carrinho), e a energia cinética é $p^2/2M$.

Depois da interação, o momentum do sistema é p (conservação do momentum). A energia cinética é

$$\frac{p^2}{2(M+m)} .$$

A energia cinética variou de

$$\Delta E_c = \frac{p^2}{2(M+m)} - \frac{p^2}{2M} = - \frac{p^2 m}{2M(M+m)} = - \frac{(Mv)^2 m}{2M(M+m)}$$

$$\Delta E_c = - \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} v^2$$

A energia cinética diminuiu. Houve algo realizado durante a interação? Houve:

1) deslizamento relativo do tijolo sôbre a face superior do carrinho; a fôrça de interação (atrito) aquece ligeiramente as superfícies em contato.

2) batida do tijolo contra a saliência; deformação dos materiais.

XIV-2-8 Energia cinética no RCM e em um referencial inercial qualquer.

No Laboratório, a energia cinética total de um sistema de duas partículas é:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad \text{(XIV-16)}$$

Mas você sabe, (Capítulo XII), que a velocidade $\underline{v}$ de uma partícula no Laboratório é igual à velocidade $\underline{V}$ da partícula no RCM, mais a velocidade $\underline{v}^*$ do CM no Laboratório.

Não é mesmo? Composição de velocidade...

De modo que, representando por V_1 e V_2 respectivamente as velocidades das partículas no RCM, a expressão (XIV-16) se escreve:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 (V_1 + v^*) + \frac{1}{2} m_2 (V_2 + v^*)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^{*2} + (m_1 V_1 + m_2 V_2) v^*.$$

Liquidemos logo com a terceira parcela do segundo membro: $m_1V_1+m_2V_2$ é o momentum total do sistema no RCM, e sabemos desde o Capítulo XII que êsse momentum total é nulo. A terceira parcela é nula.

A primeira parcela é a energia cinética total no RCM.

A segunda parcela é a ... é a ...

Martins tem razão! $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{v}^{*2}$ seria a energia cinética de uma partícula cuja massa seria igual à massa total do sistema e que coincidiria com o centro de massa.

É a energia cinética do nosso amigo PSIU!
(Capítulo XII).

De modo que:

$$(E_c)_{\text{no Lab.}} = (E_c)_{\text{no RCM}} + (E_c)_{\text{PSIU}} \qquad \text{(XIV-17)}$$

E agora, vamos à Física!

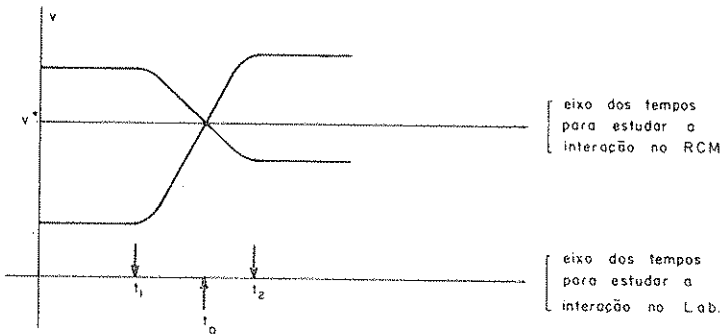



Figura XIV-10

A Fig. XIV-10 representa os gráficos v vs t de duas partículas que interagem.

Repare os dois eixos dos tempos. Escôlha um dêles, (o mais baixo), para estudar a interação no Laboratório. Escôlha o outro para estudar a interação no RCM.

Muito bem. A interação começa em t_1, e em t_o termina a primeira fase.

A fase durante a qual a distância entre as duas partículas diminui (*).

Nessa primeira fase o trabalho da fôrça de interação é negativo. A energia cinética total diminui para atingir o seu valor mínimo em t_o.

Mas a parcela que diminui é a primeira parcela do segundo membro da relação (XIV-17). É a energia cinética no RCM.

A energia cinética do fantasminho PSIU conserva-se invariante, do momento que v^* é invariante durante a interação.

E você sabe por quê?

Porque o valor da energia cinética de PSIU depende exclusivamente da escôlha do nosso referencial (inercial!). Mude de referencial e pronto! A energia do fantasminha muda.

(*) Diminui porque os gráficos se referem a uma interação repulsiva. Aumentaria se fôsse atrativa. Como no exemplo da interação da Terra com a pedra que você lança para o ar. A primeira fase corresponderia à subida da pedra, e a segunda fase, à descida.

Ora, pense dois minutinhos. A conversa que as duas partículas estão tendo não tem nada que ver - òbviamente! - com a escôlha do referencial em que escutamos essa conversa.

Em outros têrmos as tarefas que as partículas realizam durante a interação, e portanto a quantidade de energia cinética necessária para realizá-las não pode depender do referencial escolhido.

Eis porque a energia cinética disponível para realizar tarefas, ou em outros têrmos, a energia "gastável" sòmente pode ser a energia calculada no único referencial que as partículas conhecem: o RCM.

E o que acontece no RCM? Veja, em t_o a velocidade de ambas as partículas se anula. O sistema está instantâneamente parado. A energia cinética é nula!

Conclusão? Tôda a energia cinética disponível no início da interação foi gasta na tarefa realizada.

A segunda fase da interação inicia-se em t_o e termina em t_2.

Durante essa segunda fase a energia cinética do sistema aumenta de novo. Veremos porque e como nas seções seguintes.

Mas não chega geralmente a recuperar o valor inicial, a não ser em casos excepcionais.

Os gráficos da Fig. XIV-11 resumem o que acontece à energia cinética total do sistema no decorrer da interação correspondente à Fig. XIV-10. Êles representam E_c vs t no Laboratório e no RCM.

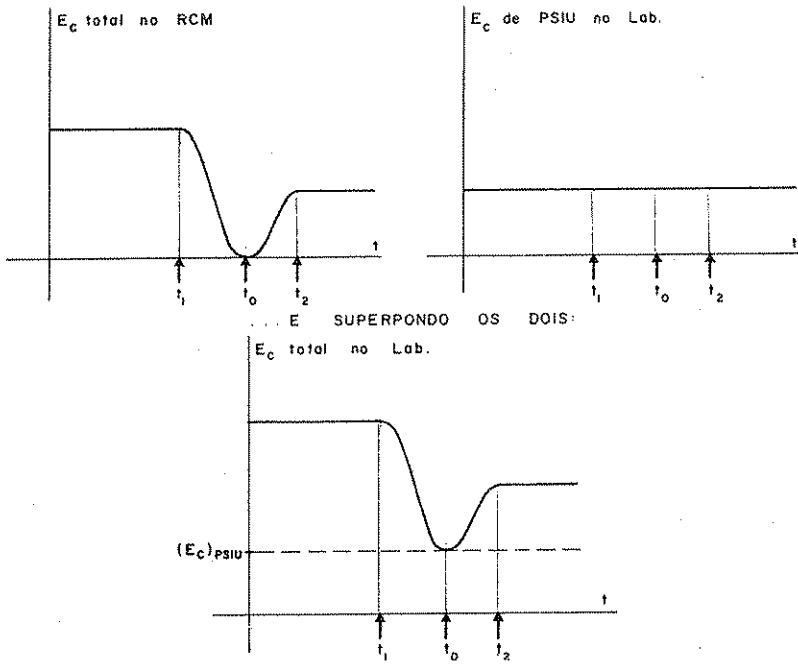
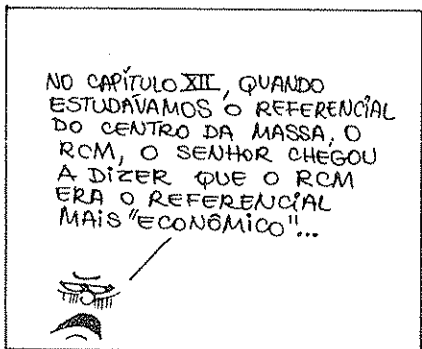
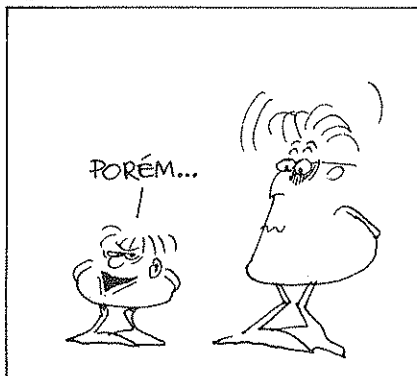
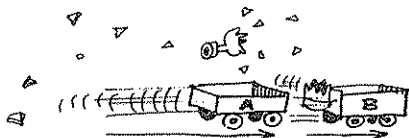



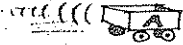
Figura XIV-11

Pronto! Aí vem o Martins de novo!

MARTINS E EU

NO CAPÍTULO XII, QUANDO ESTUDÁVAMOS O REFERENCIAL DO CENTRO DA MASSA, O RCM, O SENHOR CHEGOU A DIZER QUE O RCM ERA O REFERENCIAL MAIS "ECONÔMICO"...

EU POSSO DEIXAR O CARRINHO "B" PARADO E LANÇAR CONTRA ÊLE O CARRINHO "A"
A
B

MAS COMO O MOMENTUM TOTAL DEVE SE CONSERVAR CONSTANTE, ACONTECE QUE, DEPOIS DA INTERAÇÃO, DEPOIS DE REALIZAR A "OPERAÇÃO QUEBRA-CASCO" OS DOIS CARRINHOS ESTARÃO EM MOVIMENTO NO LABORATÓRIO...
A
B

Psiu!
CM
ENERGIA
E O FANTASMINHO LEVA COM ÊLE PARTE DA ENERGIA QUE EU TINHA PAGO AO POR O CARRINHO "A" EM MOVIMENTO. ESSA ENERGIA ERA "INTOCÁVEL" NA OPERAÇÃO QUEBRA-CASCO!

MAS SE EU LANÇO OS DOIS CARRINHOS UM CONTRA O OUTRO, E COM VELOCIDADES TAIS QUE O LABORATÓRIO SEJA O RCM, ENTÃO O MOMENTUM TOTAL É NULO...
A
B

DEPOIS DA INTERAÇÃO OS DOIS CARRINHOS PODEM ESTAR PARADOS... TODA A ENERGIA QUE EU TRANSMITI AOS CARRINHOS NO INÍCIO FOI UTILIZADA.
A
B

Exemplo 1: Na "operação quebra-casco" realizada com o Martins, como se repartiu entre os carrinhos a energia que eu comuni - quei ao sistema para pôr os carrinhos em movimento, supondo-se que eu consegui transformar o Laboratório no RCM?

As energias dos carrinhos são $\frac{p_1^2}{2m_1}$ e $\frac{p_2^2}{2m_2}$ respectivamente.

Mas, se o Laboratório coincidir com o RCM, os momenta são iguais em valor absoluto: $p_1^2 = p_2^2$.

A razão entre as energias cinéticas dos dois carrinhos é portanto:

$$\frac{(E_c)_1}{(E_c)_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Essa razão é igual à razão inversa das massas. Suponha que as mas - sas sejam $m_1 = 1{,}0kg$ e $m_2 = 2{,}0kg$. Gastando 12J de energia, 8J irão para o carrinho de massa 1,0kg, e 4J para o carrinho de massa 2,0kg.

Exemplo 2: E se a massa de uma das partículas fôr muito maior que a massa da outra?

Então a partícula de massa maior "absorve" pràticamente uma energia nula... ela não participa da brincadeira!

É o caso tôdas as vêzes que uma partícula interage com a Terra.

Se por exemplo você deixa cair uma pedra de 1kg de massa, e se você estuda a interação no RCM, os momenta da pedra e da Terra são iguais em módulo, mas a razão entre a energia cinética da Terra e a energia cinética da pedra, em um instante qualquer da interação é:

$$\frac{(E_c)_{Terra}}{(E_c)_{pedra}} = \frac{\text{massa da pedra}}{\text{massa da Terra}} \simeq 10^{-25}!$$

Eis porque, se você está interessado na energia (e não no momentum), você pode confundir a Terra com o RCM nêsse tipo de interações.

Exemplo 3: Suponha que você queira pregar um prego em um taco de madeira; você não vai dispor o taco com o prego como na Fig. XIV-12-(a).

Pois se assim fizesse, tanto o taco como o martelo estariam em movimento logo depois da batida, para satisfazer à conservação do momentum. Em consequência sòmente uma parte da energia que você comunicou ao martelo seria utilizada para pregar o prego.

Mas o que você fará é colocar o taco como na Fig. XIV-12-(b): assim fazendo, você está incorporando o taco à Terra, para as batidas de cima para baixo. O Laboratório coincide pràticamente com o RCM. Tôda a energia do martelo poderá ser utilizada em realizar a tarefa que você se fixou.

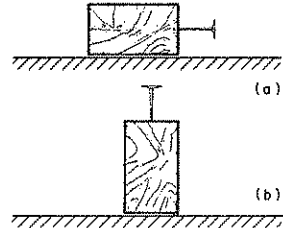
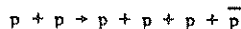



Figura XIV-12

Exemplo 4: A cada uma das partículas que compõem a matéria: elétron, proton, neutron... corresponde uma antipartícula que difere da partícula correspondente sòmente pelo sinal da carga elétrica (*): o pósitron por exemplo, antipartícula do elétron, tem mesma massa, mesmo spin, mesmas propriedades de simetria, que o elétron. A única diferença entre os dois é que a carga do elétron é $-1,6 \times 10^{-19}$ Coulomb, enquanto que a carga do pósitron é $+1,6 \times 10^{-19}$ Coulomb.

Pois bem, a criação de uma antipartícula se dá (às vêzes!) quando se bombardeia matéria por feixes de partículas com suficiente energia. Que partículas e que energia? Bem, isso depende da antipartícula que você quer obter, e você terá que aguardar um pouco para entender melhor êsse mecanismo.

Mas o ponto que eu queria frisar é o seguinte: uma das maneiras de obter um antiproton é por bombardeio de um proton por outro proton. A reação é por exemplo:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$$

(*) O neutron tem carga nula. Neutron e antineutron diferem pelos sinais opostos dos seus momentos magnéticos.

em que o "p com barra" $\bar{p}$ representa o antiproton.

Começamos com dois protons e acabamos com quatro (incluindo o anti-)! O proton e seu anti- têm massa de $1,67 \times 10^{-27}$kg. De modo que o segundo membro da equação acima tem massa que excede em $2 \times 1,67 \times 10^{-27}$kg o primeiro.

Einstein disse: "Ótimo! para criar êsse par proton-antiproton, vocês tiveram que gastar pelo menos mc^2 de energia". m é a massa suplementar criada, c é a velocidade da luz.

Então a criação do par proton-antiproton requer "pelo menos"

$$2 \times 1,67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^{8})^{2} = 3,0 \times 10^{-10} J.$$

Já lhe expliquei na seção XIV-2-5 que em se tratando de partículas, a gente prefere medir energias em elétron-volts. E $3,0 \times 10^{-10}$J são $1,88 \times 10^{9}$ev, ou seja, 1,88Bev.

E agora vem o "pelo menos" de Einstein. Se a reação p-p fôsse feita no RCM das duas partículas, o momentum total seria nulo antes da interação, de modo que as quatro partículas obtidas - os três protons e o antiproton - poderiam estar em repouso no Laboratório. A energia cinética total projétil-alvo seria disponível para a "operação criação do par". Bastaria gastar 1,88Bev - digamos 2 Bev para deixar de ser zura - e teríamos uma probabilidade de criar um antiproton.

Acontece porém que, até agora, nos grandes aceleradores, o proton alvo está em repouso no Laboratório. O momentum total do sistema projétil-alvo não é nulo. De modo que as quatro partículas obtidas na reação devem estar em movimento para conservar o momentum.

E se estão em movimento, elas possuem energia cinética.

E se possuem energia cinética, é que parte da energia cinética inicial não pode ser aproveitada para a criação do par proton-antiproton.

É sempre a mesma história: o fantasminho PSIU é um ladrão de energia!

Resultado: para dispor dos 2 Bev necessários à criação do par, é necessário dar 6 Bev de energia ao proton projétil.

$\frac{2}{3}$ dessa energia é gasta à tôa!

Ouvímos conversas de tôdas espécies: com molas, com massa de vidraceiro...

Reuní a seguir todos os tipos de gráficos v vs t que podemos obter nessas interações.

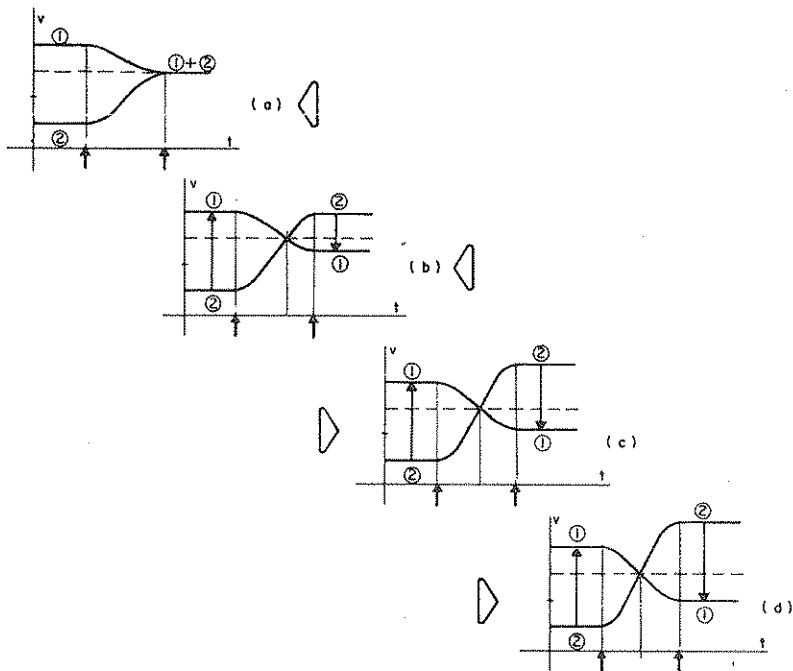
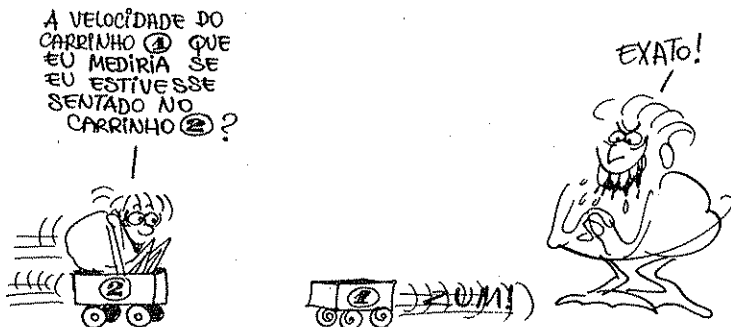



Figura XIV-12

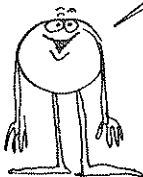
Observe bem êsses gráficos.

E repare a velocidade relativa da partícula (1), por exemplo, em relação à partícula (2).

Ou, se preferir, a velocidade da partícula (1) no referencial da partícula (2).

Na interação em que há massa de vidraceiro entre os dois carrinhos (Fig. XIV-12-a), êles continuam juntos depois da interação; grudados um ao outro.

A velocidade relativa é nula depois da interação.

Diremos que uma interação dêsse tipo é totalmente inelástica.

Numa interação totalmente inelástica, a parte disponível da energia cinética é utilizada para realizar uma tarefa mecânicamente irreversível: no caso da massa de vidraceiro, a deformação dessa massa.

Pegue uma bola de massa de vidraceiro, ou de massa de modelar.
Deforme a bola.
Pode por exemplo esculpir a cara do Mar - tins.
Deixe a sua obra de arte na mesa e vá dormir.
O dia seguinte, você vai encontrá-la no mesmo estado, não é mesmo?
Outro exemplo: você se lembra do pano e da caixa de fósforos da seção XIV-2-6?
Enquanto a caixa e o pano atritam um contra o outro, a energia cinética do sistema diminui, mas a temperatura aumenta.
Você não acredita sèriamente que, depois disso, a temperatura do pano e da caixa pudesse diminuir, enquanto aumentaria a energia cinética do sistema, não é?
Pois é!
Dois exemplos de irreversibilidade.

Passemos agora às conversas com molas no meio.

Obtemos os tipos de gráficos (b) (c)... e mais difìcilmente (d), da Fig. XIV-12.

A velocidade relativa depois da interação tem sentido contrário do que ela tinha antes, <u>e o módulo é menor</u>, <u>ou talvez igual</u> na melhor das hipóteses, isto é com molas de excelente qualidade.

Nos casos - excepcionais com carrinhos e molas - em que a interação conserva o módulo da velocidade relativa, diremos que a interação é <u>totalmente, ou perfeitamente, elástica</u>.

Numa interação elástica, o sistema recupera depois da interação a mesma energia cinética que êle tinha antes.

Veja a Fig. XIV-13: é o gráfico v vs t de uma interação elástica e consequentemente:

$$u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2)$$

ou: $$u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \qquad \text{(XIV-18)}$$

Escrevamos a conservação do momentum:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

ou: $$m_1(u_1 - v_1) = - m_2(u_2 - v_2) \qquad \text{(XIV-19)}$$

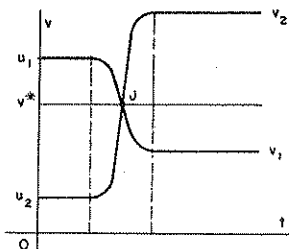



Figura XIV-13

Multipliquemos (XIV-18) e (XIV-19) membro a membro:

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = - m_2(u_2^2 - v_2^2)$$

ou: $$m_1u_1^2 + m_2u_2^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2$$

Isso significa que:

$$(E_c)_{antes} = (E_c)_{depois}$$

Nas interações elásticas pelo contrário, a energia cinética depois da interação é menor que antes.

Numa interação perfeitamente elástica a parte disponível da energia cinética do sistema é utilizada para realizar tarefas mecânicamente reversíveis.

Comprima uma mola de bôa qualidade: você gasta energia.

Largando a mola, ela volta ao seu estado inicial, e se fôr de bôa qualidade, não se lembra de ter sido comprimida.

E para não se lembrar de ter sido comprimida, ela tem que devolver a energia que você tinha gasto ao comprimí-la.

Entendido?

Mas voltaremos ao assunto na seção XIV-4.

De modo que já temos os dois casos extremos.

Oito ou oitenta.

Oito: interação totalmente inelástica.

Oitenta: interação totalmente elástica.

Nos casos intermediários - gráficos (b) e (c) da Fig. XIV-12 - o módulo da velocidade relativa depois da interação é menor que antes.

A interação é dita <u>parcialmente elástica</u>...

Nas interações parcialmente elásticas parte das tarefas realizadas é reversível, e parte é irreversível.

<u>Exemplo 1</u>: Uma mola real é formada por conjunto de cristais em que os átomos do metal são dispostos ordenadamente.

Quando a mola se deforma, a rêde de um mesmo cristal se deforma elásticamente. Mas há paralelamente, deslocamentos de cristais vizinhos um em relação ao outro. Êsses deslocamentos são em geral irreversíveis.

<u>Exemplo 2</u>: Como determinar as velocidades depois de uma interação elástica totalmente?

Basta escrever:

- a conservação do momentum, que se verifica qualquer que seja o tipo de interação, elástica ou não:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

depois antes

- a elasticidade da interação; você poderia escrever a conservação da energia cinética. É porém mais simples, para os cálculos, escrever que as velocidades relativas antes e depois são opostas:

$$v_1 - v_2 = u_2 - u_1$$

As duas equações precedentes constituem um sistema de duas equações com duas incógnitas: $\underline{v_1}$ e $\underline{v_2}$. Sendo o sistema do 1º grau, você não terá dificuldades em resolvê-lo, não é?

Há uma maneira talvez mais simples: recorrer ao gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ da interação... mais uma vez.

Volte à Fig. XIV-13; você observa que "conservação do momentum + inversão da velocidade relativa" equivale a inverter a velocidade de cada partícula no RCM. Em outros têrmos, cada uma das curvas $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ admite J como centro de simetria!

Calcule então v^* e a seguir as velocidades U_1 e U_2 no RCM antes da interação. Inverte U_1 e U_2 para ter as velocidades V_1 e V_2 depois da interação, e finalmente volte ao Laboratório.

A sequência das operações, depois de obter $\underline{v}^*$ é:

1) $U_1 = u_1 - v^*$

2) $U_2 = u_2 - v^*$

3) $V_1 = -U_1 = v^* - u_1$

4) $V_2 = -U_2 = v^* - u_2$

5) $v_1 = V_1 + v^* = 2v^* - u_1$

6) $v_2 = V_2 + v^* = 2v^* - u_2$

XIV-3-2 Coeficiente de restituição.

Aprendemos que uma interação elástica se diferencia de uma interação inelástica pelo fato que o módulo da velocidade relativa das duas partículas é conservado pela interação elástica, o que não acontece nas interações inelásticas.

O grau de elasticidade de uma interação unidimensional pode se medir pela razão entre os módulos das velocidades relativas depois e antes da interação.

A essa razão dá-se o nome de coeficiente de restituição da interação:

$$e = \left|\frac{\text{velocidade relativa depois}}{\text{velocidade relativa antes}}\right| \qquad \text{(XIV-20)}$$

Uma interação totalmente inelástica tem coeficiente de restituição igual a zero.

Uma interação totalmente elástica tem coeficiente de restituição igual a um.

XIV-3-3 Como reconhecer uma interação inelástica?

Coeficiente de restituição menor que 1?

Energia cinética depois menor que a energia cinética antes?

Tudo isto é muito bonito, mas se você está assistindo à experiência sem poder fazer medições, ou construir gráficos, como distinguir a interação

elástica da inelástica?

Lembre-se da reversibilidade, ou da irreversibilidade, discutidas na seção precedente.

Você poderá, dessa maneira, reconhecer as interações francamente i-nelásticas.

Há um meio muito simples de testar a irreversibilidade de uma tarefa realizada durante uma interação: INVERTA O SENTIDO DO TEMPO.

Ou seja, "faça de conta que o filme está sendo passado ao contrá-rio".

Eu explico com um exemplo.

Imagine que alguém filme a experiência dos dois carrinhos com mas-sa de modelar.

O filme passado normalmente mostra um carrinho com número (1) para-o. Êle traz na frente, como para-choque, um bloco de massa bem cortadinho.

Um outro carrinho com número (2) aproxima-se do primeiro, bate na sa, deformando-a, e pondo o carrinho (1) em movimento.

Finalmente os dois carrinhos juntos se afastam em movimento unifor-

Se alguém assistisse ao filme passado ao contrário, êle veria o se :

Um "trem" de dois carrinhos juntos está se aproximando em movimento . Os dois carrinhos são ligados por um bôlo de massa de modelar.

De repente o carrinho marcado (2), que está na frente, vai se sepa-arrinho (1), o qual diminui a marcha até parar, enquanto que o bôlo i se transformando em paralelepípedo bem cortadinho.

final, o carrinho (1) com o para-choque novinho está parado, en-carrinho (2) vai se afastando com velocidade uniforme.

ue diria êsse espectador?

diria: "Espere aí! Há algo errado nêsse negócio! O filme está o contrário".

as tarefas irreversíveis orientam, por assim dizer, a "seta"

de tão improvável na reversibilidade dessas tarefas que nos

ela..."quando o filme passa ao contrário".

De modo que, se você hesita quanto a elasticidade ou inelasticidade de uma interação, PASSE O FILME AO CONTRÁRIO!

XIV-4 Interações elásticas: energia potencial de interação.

XIV-4-1 Energia mecânica: o postulado de sua conservação nas interações elásticas.

Voltemos ao gráfico v vs t de uma interação unidimensional elástica.

A interação começa em t_1. O sistema tem uma energia cinética E_c.

A primeira fase se desenrola no intervalo (t_1 t_o). Supondo-se a interação repulsiva, a distância entre as partículas diminui de algo proporcional à área sombreada numerada (1) na Figura XIV-14.

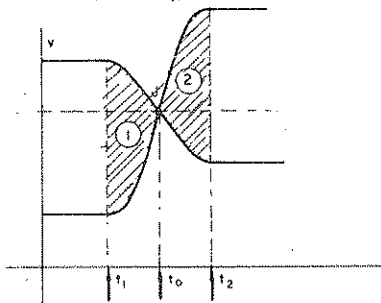



Figura XIV-14

Nessa primeira fase a energia cinética diminui para igualar-se, em t_o, à energia do fantasminho PSIU.

Se estudássemos a interação no RCM, a energia cinética anular-se-ía nêsse instante, certo?

A segunda fase da interação inicia-se em t_o e termina em t_2.

Durante essa fase as partículas afastam-se de novo. A distância entre elas aumenta de algo proporcional à área sombreada numerada (2). As áreas (1) e (2) são equivalentes: os gráficos v vs t são simétricos em relação ao ponto J. De modo que a distância "perdida" durante a primeira fase foi recuperada inteiramente durante a segunda.

Durante essa segunda fase, a energia cinética do sistema aumenta a partir do valor mínimo a que ela tinha chegado em t_o, e no final da interação, ela volta a recuperar o valor inicial E_c.

O que aconteceu à energia cinética "perdida" durante a primeira fase?

Ela serviu para realizar uma tarefa reversível.

No caso dos carrinhos conversarem por meio de uma mola de excelente qualidade, ela serviu para comprimir a mola, mas a mola está disposta a voltar a sua configuração inicial.

No caso dos carrinhos conversarem por meio de dois ímãs com polos de mesmo nome frente a frente, como na Fig. XIV-15, a energia cinética "perdida" durante a primeira fase da interação serve para modificar a posição relativa dos dois ímãs. Mas êles estão dispostos a voltar exatamente a sua configuração inicial.

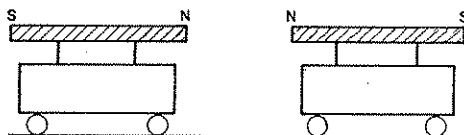



Figura XIV-15

Para evitar de falar em recuperação "milagrosa", durante a segunda fase, da energia cinética perdida durante a primeira, diz-se que ela se transformou em <u>energia potencial de interação</u>.

A variação de energia potencial de interação está associada, <u>sempre, a uma mudança reversível da configuração geométrica do sistema</u>.

<u>Exemplo 1</u>: Quando os dois carrinhos interagem por meio de uma mola (suposta ideal), a configuração geométrica da mola muda durante a primeira fase. Ela se comprime no caso de uma interação repulsiva. Ela se alongaria no caso de uma interação atrativa.

Lembre-se dos carrinhos amarrados a uma mesma mola, e andando feitos "minhoca", no Capítulo X.

A interação é contínua. Ela é alternadamente atrativa e repulsiva. A configuração geométrica da mola muda periòdicamente. Periòdicamente ela volta

à mesma forma geométrica. Pois bem, se a interação fôr elástica, a energia cinética do sistema volta a assumir o mesmo valor tôdas as vêzes que a mola recupera a mesma forma. Há energia potencial de interação associada à configuração do sistema. No caso, ao estado de deformação da mola.

<u>Exemplo 2</u>: Quando o Martins lança uma pedra para cima com a atiradeira, há uma primeira interação, aproximadamente elástica, entre o sistema Martins-Terra por um lado, e a pedra por outro lado, por meio do elástico da atiradeira.

A energia potencial que o Martins tinha armazenada no elástico ao esticá-lo (às custas do almoço que êle acabava de fazer), transforma-se em energia cinética do sistema. E como a "partícula" Martins-Terra tem massa muito, mas muito maior mesmo, que a pedra, acontece que é essa última que "abocanha" pràticamente tôda a energia cinética disponível.

A seguir, há a interação gravitacional Terra-pedra.

Também elástica?

Também elástica?

Prova?

Mas é simples! Quando a pedra volta à cair na mão do Martins, ela tem a mesma velocidade, em módulo, que quando foi lançada (*). Nêsse instante, o sistema Terra-pedra voltou à mesma configuração inicial, e recuperou a mesma energia Cinética. A interação é elástica.

Pois bem, na interação elástica gravitacional há também energia potencial associada à configuração do sistema. Essa "configuração" é aliás um nome um pouco pomposo para caracterizar simplesmente a distância entre apedra e o centro da Terra.

De modo que, voltando aos nossos pagos, energia potencial é algo ligado à configuração geométrica de um sistema que interage.

A energia associada ao movimento, a energia cinética, é um conceito dinâmico.

A energia associada à configuração geométrica do sistema, a energia potencial, é um conceito estático.

Durante uma interação elástica, um sistema possui ao mesmo tempo e-

---

(*) Despreza-se a resistência do ar, evidentemente.

nergia cinética e energia potencial. Energia de movimento e energia de configuração.

A soma dessas duas formas de energia é por definição a energia mecânica do sistema.

Nas interações elásticas, postula-se a conservação da energia mecânica do sistema.

Nas interações elásticas:
$E_c + E_p = Cte$

(XIV-21)

XIV-4-2 Como se mede a variação da energia potencial de interação.

A relação (XIV-12):

$$F.\Delta r = \Delta(\Sigma \frac{1}{2} mv^2) \quad \text{(XIV-12)}$$

nos mostrou que a variação da energia cinética de um sistema, em qualquer intervalo de tempo, é medida pelo trabalho da fôrça de interação durante o mesmo intervalo.

Isto é verdadeira em qualquer interação, elástica ou não.

Nas interações elásticas, acabamos de postular a conservação da energia mecânica (relação XIV-21): se a energia mecânica diminui de 10J, a energia potencial aumenta de 10J durante o mesmo intervalo.

Ou ainda:

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad \text{(XIV-22)}$$

Vemos então que nas interações elásticas o trabalho da fôrça de interação mede "menos a variação de energia potencial":

$$F.\Delta r = -\Delta E_p \; (=\Delta E_c) \quad \text{(XIV-23)}$$

Na seção precedente, aprendemos que a energia potencial é associada à configuração do sistema que interage elàsticamente.

Isto significa que tôdas as vêzes que o sistema está na mesma configuração, a energia potencial associada é a mesma.

Ou ainda, que a variação de energia potencial sofrida pelo sistema quando passa da configuração A para a configuração B é igual e de sinal con -

trário à variação associada à passagem da configuração B para a configuração A.

E isto, qualquer que seja a maneira pela qual o sistema passa de uma à outra configuração.

Tome por exemplo o caso dos dois carrinhos que interagem por meio da mola.

Se a interação fôr elástica, a energia potencial do sistema será a mesma, por exemplo 10J, tôdas as vêzes que a distância entre os dois carrinhos fôr igual a 10cm (Fig. XIV-16).

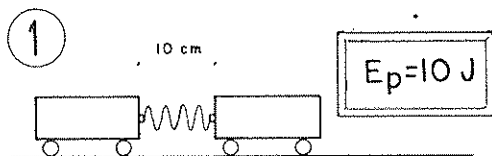



Figura XIV-16

Essa energia potencial será também a mesma, por exemplo 15J, tôdas as vêzes que a distância entre os carrinhos fôr igual a 5cm (Fig. XIV-17).

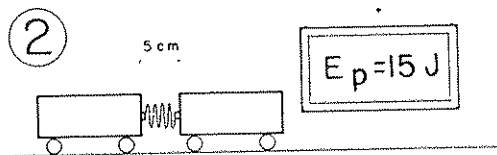



Figura XIV-17

De maneira que tôdas as vêzes que o sistema passar da configuração (1) para a configuração (2), a energia potencial aumenta de 5J.

E tôdas as vêzes que o sistema passa da configuração (3) para a configuração (1), a energia potencial diminui de 5J.

E o que importa que você entenda é que a maneira pela qual o sistema passa de uma à outra configuração <u>é inteiramente irrelevante quanto à variação de energia potencial</u>.

Eu posso por exemplo ter lançado os dois carrinhos um contra o ou-

tro: na passagem da configuração (1) para a configuração (2), o aumenta de 5J em energia potencial é pago pela diminuição de 5J da energia cinética.

Ou então eu posso pegar os dois carrinhos nas mãos, apertando-os um contra o outro. O aumento de 5J em energia potencial estaria sendo pago por mim, às custas de um consumo extra de glucose nas minhas células musculares, talvez.

Claro está que nêsse último caso os carrinhos não estariam sòmente interagindo entre si. Êles estariam também interagindo comigo.

Que fique então bem claro que se as duas partículas constituem um sistema isolado, isto é, interagem sòmente entre si, as variações de energia potencial do sistema são sempre "pagas" por variações opostas da energia cinética.

O fato que as variações da energia potencial de um sistema que interage elàsticamente independam da maneira pela qual a configuração do sistema se modifica, é devido a uma propriedade fundamental da fôrça de interação em tais sistemas.

Essa propriedade é a seguinte: <u>nos sistemas que interagem elàsticamente, a fôrça de interação depende sòmente da configuração atual do sistema e não da maneira pela qual essa configuração foi atingida</u>.

Nessas condições, o trabalho da fôrça de interação independe realmente do "caminho" percorrido pelo sistema entre duas configurações. Êsse trabalho depende sòmente da configuração inicial e da configuração final do sistema.

Dois exemplos lhe explicarão talvez melhor o que quero dizer.

<u>Exemplo 1</u>: Variação da energia potencial associada à deformação de uma mola.

A lei de fôrça, ou seja, a lei de interação, é representada no grá- da figura XIV-18 na página seguinte.

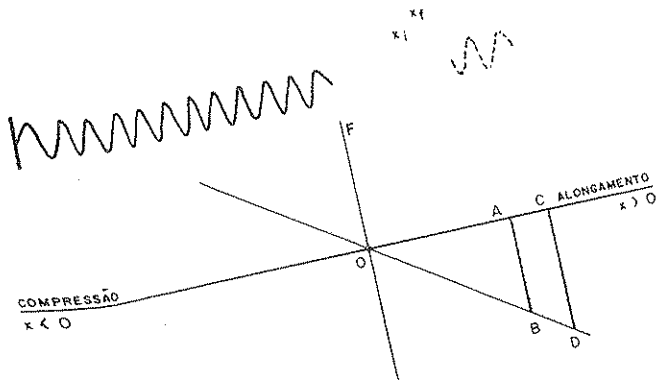



Figura XIV-18

É uma lei linear, em excelente aproximação, se a mola fôr de bôa qualidade e enquanto a deformação x não fôr muito grande.

A expressão analítica da lei de interação é:

$$F = -kx \qquad \text{(XIV-24)}$$

Nessa expressão F é a fôrça exercida pela mola quando ela se acha deformada de x.

A um alongamento $(x > 0)$ corresponde uma interação atrativa e conse quentemente a fôrça de interação é negativa.

A uma compressão $(x < 0)$ corresponde uma interação repulsiva, com u ma fôrça positiva.

k é o coeficiente da mola. Êle se expressa em Newton por metro (N/m).

Muito bem. Suponha que a mola se deforme, por qualquer razão e em qualquer circunstância, do alongamento inicial x_i até o alongamento final x_f

O trabalho $F.\Delta r$ da fôrça de interação é proporcional à área do trapézio sombreado da figura.

Calculemos a área do trapézio.

A altura é AC = $x_f - x_i$.

A base AB = $-kx_i$.

A base CD = $-kx_f$.

A área, representando o trabalho W da fôrça de interação, é:

$$W = -\frac{1}{2}k(x_f + x_i)(x_f - x_i)$$

$$W = -\{\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\}$$

Aprendemos porém pela expressão (XIV-23) que o trabalho é "<u>menos</u> a variação de energia potencial do sistema":

$$W = -\Delta E_p.$$

Então, no caso presente:

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \qquad \text{(XIV-25)}$$

E você observa uma coisa muito importante; a variação da energia potencial associada à deformação da mola é a diferença entre:

- a parcela $\frac{1}{2}kx_f^2$, parcela essa completamente determinada pela configuração <u>final</u> do sistema (basta dar x_f e você tem o valor da parcela).
- e a parcela $\frac{1}{2}kx_i^2$, parcela essa completamente determinada pela configuração <u>inicial</u> do sistema.

O que eu quero dizer mais uma vez é que nada, na expressão (XIV-25) lembra a maneira nem as circunstâncias pelas quais o sistema passa da configuração inicial para a configuração final.

Exemplo 2: Variação da energia potencial associada à uma mudança de configuração do sistema Terra-pedra.

Uma pedra passa - de qualquer maneira e em quaisquer circunstâncias - da altura h_i acima do nível do chão, (ou talvez acima do nível do 23º andar de um edifício!) para a altura h_f. (Fig. XIV-19).

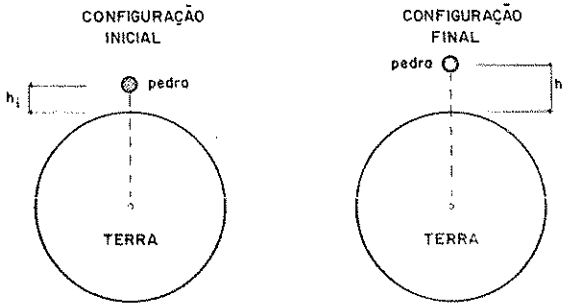



Figura XIV-19

Se h_i e h_f forem muito pequenos em comparação com os $6,4 \times 10^3$km do raio da Terra, a fôrça de interação é constante, atrativa, e igual em módulo à massa m da pedra multiplicada pelo valor g da aceleração da gravidade.

Em grandeza e sinal: $F = - mg$ (XIV-26)

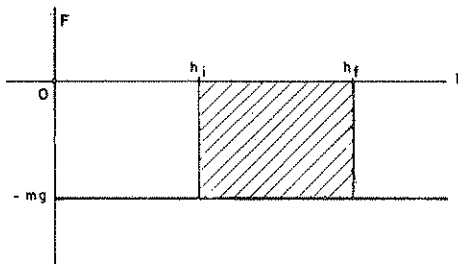



Figura XIV-20

O gráfico da fôrça de interação é o da Fig. XIV-20, representado na página anterior.

Na passagem da configuração inicial para a configuração final, o trabalho da fôrça de interação é representado pela área do retângulo sombreado. Imediatamente:

$$W = -(mgh_f - mgh_i)$$

e consequentemente:

$$\Delta E_p = mgh_f - mgh_i \qquad \text{(XIV-27)}$$

De novo a diferença entre duas parcelas; uma que depende sòmente da configuração final; outra que depende sòmente da configuração inicial.

Mais uma vez, nada na expressão (XIV-27) lembra a maneira nem as circunstâncias pelas quais o sistema evoluiu de uma à outra configuração.

XIV-4-3 <u>Determinação arbitrária da energia potencial de um sistema</u>.

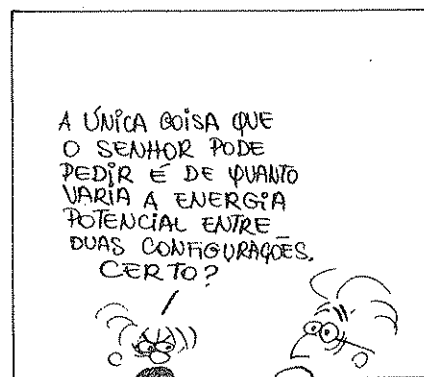
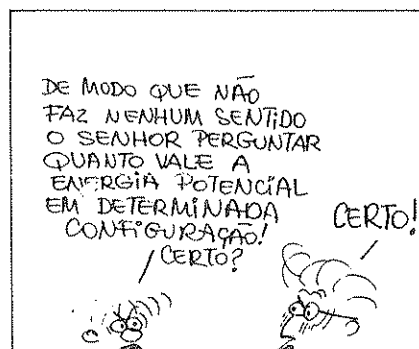
Quanto vale a energia potencial de um sistema em determinada configuração?

Quantos Joules estão armazenados numa mola comprimida de 10cm?

Quantos Joules estão armazenados no sistema Terra-pedra quando a pedra está a 10m de altura?

DE MODO QUE NÃO FAZ NENHUM SENTIDO O SENHOR PERGUNTAR QUANTO VALE A ENERGIA POTENCIAL EM DETERMINADA CONFIGURAÇÃO! CERTO?

CERTO!

A ÚNICA COISA QUE O SENHOR PODE PEDIR É DE QUANTO VARIA A ENERGIA POTENCIAL ENTRE DUAS CONFIGURAÇÕES. CERTO?

Martins tem tôda razão.

Não faz sentido nenhum perguntar quanto vale a energia potencial de um sistema em determinada configuração.

Só podemos perguntar de quanto variou a energia potencial entre duas configurações determinadas.

Pois é somente isso que podemos medir.

Há no entanto uma solução... de compromisso, e que não faz mal a ninguém.

Costuma-se arbitrar um valor da energia potencial para uma determinada configuração.

Quê valor? Qualquer um!

Ou melhor, um valor que nos torne a vida mais fácil, se possível; facilitando os cálculos por exemplo.

Uma vez arbitrado êsse valor, está claro que poderemos associar um valor da energia potencial a qualquer outra configuração do sistema, não é mesmo?

Bastará medir a variação de energia potencial entre a configuração "base" e a nova configuração.

Exemplo 1: Caso da mola.

Qual é a energia potencial associada a um sistema que interage por meio de uma mola quando a mola está relaxada? Nem alongada, nem comprimida?

Não sei.

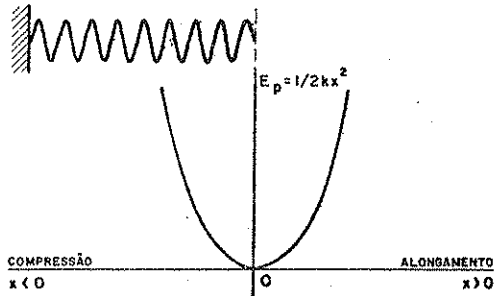



Figura XIV-21

Não há meio de sabê-lo.

Mas eu posso sempre postular que essa energia é nula. O reconfortante nessa escôlha é que ninguém (nem a Física!) virá me dizer que estou errado. ... Ou que estou certo, aliás!

Muito bem. Postulamos que:

$$\text{em } x = 0, \quad E_p = 0$$

Tendo feito a escôlha, tudo vai sòzinho.

Volte à expressão (XIV-25) da seção precedente.

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2 \qquad \text{(XIV-25)}$$

Ela diz que, se tomarmos como configuração inicial a posição relaxada: $x_i = 0$, a variação de energia potencial entre essa configuração e a configuração caracterizada pela deformação x é

$$\Delta E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

E tendo escolhido arbitràriamente $E_p = 0$ para $x = 0$, ou, se quiser, $E_p(0) = 0$, então

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2} \qquad \text{(XIV-28)}$$

Viu? Aceitando que a energia potencial seja nula quando a deformação da mola é nula, eu posso atribuir à deformação caracterizada por x a energia potencial (XIV-28).

O gráfico E_p vs x é a parábola da Figura XIV-21.

Exemplo 2: Caso da interação gravitacional Terra-pedra.

Suponha que no estudo de uma interação entre um objeto de massa m e a Terra, o objeto nunca se encontre abaixo de determinado nível que eu chamo de "nível base" (Fig. XIV-22).

Consequentemente, a energia potencial de interação é mínima quando o objeto se encontra nêsse nível.

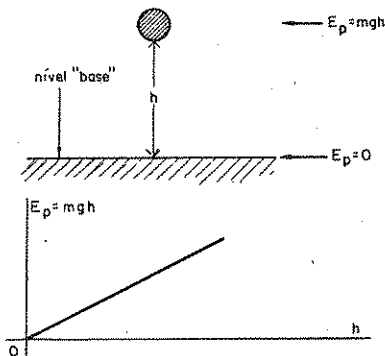



Figura XIV-22

Não faz mal nenhum arbitrar que a energia potencial de interação é nula quando o objeto se encontra no nível-base:

$$E_p = 0 \text{ para } h = 0, \quad \text{ou} \quad E_p(0) = 0$$

Você deduzirá imediatamente (ou voltando ao Exemplo 2 da seção anterior se necessário) que nessas condições:

$$\boxed{E_p(h) = mgh} \qquad \text{(XIV-29)}$$

A variação de E_p em função de h é linear, como mostra o gráfico da Figura XIV-22.

Exemplo 3: Interação gravitacional geral.

O exemplo precedente sòmente se aplica aos casos em que a "pedra", ou o objeto que interage com a Terra, permanece na vizinhança da superfície terrestre.

Não é o caso dos Saturno nas suas viagens à Lua e futuramente a outros planêtas.

Quando a distância entre o corpo e o centro da Terra se torna comparável com o raio terrestre, a energia potencial de interação tem outra expressão, que estudaremos no Capítulo seguinte.

O que eu quero dizer por enquanto é que nessas interações o "ní-

vel-base" é tomado no infinito. Arbitra-se que a energia potencial de interação é nula quando a distância Terra-corpo é infinita: $E_p(\infty) = 0$.

E consequentemente, qual é o sinal de $E_p(r)$ para r qualquer?

XIV-4-4 Gráficos de potencial.

Representemos por r a distância entre duas partículas que interagem unidimensionalmente, e elàsticamente. Estudamos a interação no RCM.

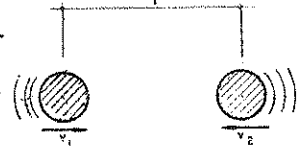



Figura XIV-23

Arbitremos que para $r = r_o$, $E_p = 0$, por exemplo.

O conhecimento da lei de fôrça nos dá o valor da fôrça de interação para qualquer valor de r.

O cálculo do trabalho dessa fôrça entre a distância r_o e a distância genérica r nos fornecerá o valor $E_p(r)$ da energia potencial para o valor r da distância.

Poderemos então construir o gráfico E_p vs r.

Obteremos assim algo semelhante, talvez, com o gráfico da Figura XIV-24.

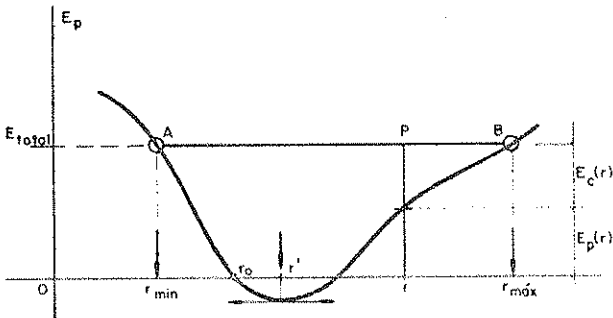



Figura XIV-24

Tal gráfico é chamado de gráfico de potencial da interação.

Suponha que em determinado instante a distância entre as partículas seja r.

Nêsse instante a energia potencial de interação é $E_p(r)$ e a energia cinética $E_c(r)$. (Fig. XIV-24).

A energia mecânica do sistema nêsse instante é

$$E_{total} = E_p(r) + E_c(r)$$

Sendo elástica a interação, essa energia mecânica se conserva invariante durante a interação.

Isso significa que qualquer que seja r a ordenada do ponto P (ver figura) é constante, e portanto êsse ponto se desloca sôbre a horizontal representando a energia total do sistema.

Evidentemente, no caso de gráficos semelhantes ao da Fig. XIV - 24, nem todos os valores de r são permitidos, dada a energia total E_{total}.

A reta de energia total encontra a curva do potencial em A e B.

O ponto A corresponde à distância $r_{mín}$.

Nessa configuração, a energia mecânica do sistema é tôda ela potencial; a energia cinética é nula (lembre-se que estamos estudando a interação no RCM).

Você observa então que r não pode ser menor que $r_{mín}$, pois se isso acontecesse, a energia cinética do sistema seria negativa, o que é òbviamente absurdo.

O ponto B por seu lado corresponde à distância $r_{máx}$. Nessa configuração, a energia cinética do sistema é de novo nula; a energia mecânica é tôda ela potencial.

r não pode ser maior que $r_{máx}$ porque de novo a energia cinética seria negativa.

Concluimos portanto que os únicos valores permitidos para r, para o valor considerado de E_{total}, são os valores do intervalo $|r_{mín}, r_{máx}|$.

Fìsicamente, a configuração do sistema varia contìnuamente entre a distância $r_{mín}$ e a distância $r_{máx}$, com transformação contínua de energia potencial em energia cinética, e inversamente.

Diz-se que o sistema "oscila no poço de potencial" da Fig. XIV- 24, sendo $r_{mín}$ e $r_{máx}$ as "distâncias de retôrno".

O gráfico mostra que para r = r' a energia cinética é máxima, sendo então mínima a energia potencial.

Exemplo - Partícula oscilando na extremidade de uma mola; a outra extremidade da mola é fixa no Laboratório.

A massa da bola é m = 0,10kg. O coeficiente da mola é k = 10N/m. O Laboratório é pràticamente o RCM do sistema.

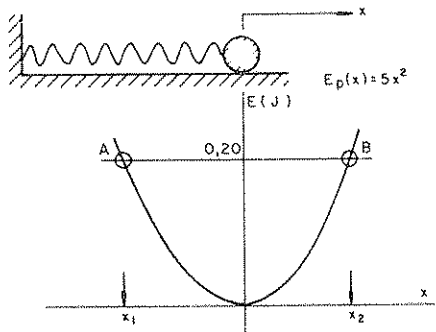
Sabemos por outro lado que devido à disparidade entre a massa da Terra e a massa da bola, a energia cinética da Terra é nula para todos os efeitos.

Dessa maneira, a energia cinética do sistema reduz-se à energia cinética da bola.

Figura XIV-25

Tomemos como zero da energia potencial a configuração em que a mola está relaxada: é a posição de equilíbrio estático da bola. Então

$$E_p(x) = \frac{1}{2} kx^2 = 5x^2$$

Suponhamos que a velocidade da bola ao passar pela posição de equilíbrio (x = 0) seja 2,0m/s. Nêsse instante a energia cinética da bola (e do sistema) é $\frac{1}{2}$ x 0,10 x 4 = 0,20 J.

É a energia mecânica total do sistema, já que $E_p(0) = 0$.

Essa energia conserva-se constante. Construimos então no gráfico da Fig. XIV-25 a reta de ordenada 0,20 J. Ela encontro o poço de potencial parabólico $E_p(x) = 5x^2$ em A e B.

O ponto A corresponde à compressão x_1 da mola. O ponto B corresponde ao alongamento x_2. Você achará fàcilmente: $|x_1| = |x_2| = 0{,}20$ m.

As deformações fora do intervalo $|x_1\ x_2|$ são proibidas ao sistema enquanto a energia total fôr 0,20 J.

Se você quiser aumentar o intervalo permitido para as deformações, o que é que deverá fazer?

E se quiser diminuir êsse intervalo?

XIV-4-6 Relação entre fôrça e energia potencial nas interações unidimensionais elásticas.

Representei na Fig. XIV-26 o gráfico de potencial da interação, elástica entre duas partículas.

Em abscissas, a distância r entre as partículas.

Em ordenadas, a energia potencial E_p do sistema.

Qual é a fôrça de interação quando a distância entre as duas partículas é igual a r?

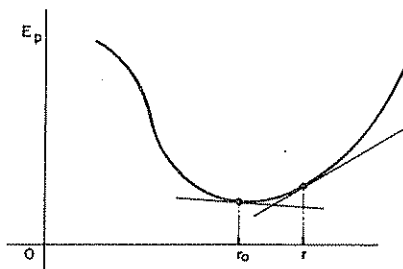



Figura XIV-26

Eu lhe expliquei que, se a distância varia de Δr (pequeno) a partir do valor r, a variação de energia potencial é

$$\Delta E_p = -F\Delta r$$

A variação de energia potencial é igual a "menos o trabalho da fôrça de interação".

Então:

$$F = -\frac{\Delta E_p}{\Delta r}$$

ou para ser formalmente correto (Δr é muito pequeno!):

$$F = -\frac{dE_p}{dr} \qquad \text{(XIV-30)}$$

A fôrça de interação é oposta à taxa de variação instantânea da energia potencial em função da distância entre as partículas.

Ora, taxa de variação?... tangente e coeficiente angular!

Construa a tangente ao gráfico de potencial no ponto r. Meça o coeficiente angular, e pronto!

Na Fig. XIV-26, a tangente no ponto r tem coeficiente angular positivo. A fôrça de interação é pois negativa. A interação é atrativa quando a distância entre as partículas é r.

Exemplo: Equilíbrios estáveis e instáveis.

Voltemos juntos à Figura XIV-26.

O poço de potencial representado passa por um mínimo quando a distância entre as partículas é r_o.

Quando as partículas distam r_o, a fôrça de interação é nula, certo?

Será que $r = r_o$ caracteriza uma posição de equilíbrio estável?

Vejamos. Afastemos um pouco as partículas, a partir de $r = r_o$. Acabamos de ver que a interação é atrativa para $r > r_o$. Portanto, se largarmos as partículas a partir da nova posição, elas vão se aproximar, e a distância tende a voltar para o valor inicial r_o.

Se pelo contrário aproximarmos as partículas a partir da distância $r = r_o$, a fôrça de interação se torna positiva, como você verifica imediatamente sôbre o gráfico da Fig. XIV-26.

A interação é repulsiva. E consequentemente as partículas vão afastar-se de novo, tendendo também a distância r a voltar ao seu valor inicial

r_o.

Concluimos que a distância r_o caracteriza um equilíbrio estável do sistema. Pois um equilíbrio é estável quando o sistema, afastado do equilí - brio, tende sòzinho a voltar para êle.

O equilíbrio estável de um sistema exige que a energia potencial seja mínima.

Se pelo contrário o gráfico fôr um "morro" em vez ser um poço (Fig. XIV-27), a fôrça de interação é efetivamente nula no ponto r_o, máximo da energia potencial do sistema. No entanto, trata-se de um equilíbrio instável, pois afastando-se o sistema dessa posição, êle continuará sòzinho a afastar-se dêle. Você observa com efeito que a interação é repulsiva para $r > r_o$, e atrativa para $r < r_o$.

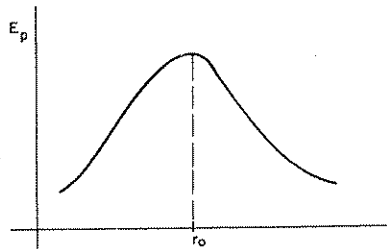



Figura XIV-27

XIV-5 Expressão geral do trabalho.

Uma partícula de massa m descreve uma trajetória curvilínea, no decorrer de uma interação. Em determinado instante a fôrça de interação que age sôbre a partícula é $\vec{F}$. (Fig. XIV-28).

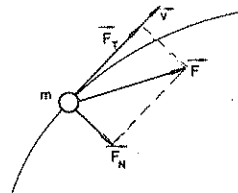
$\vec{F}$ tem uma componente normal $\vec{F}_N$ e uma componente tangencial $\vec{F}_T$.

Já aprendemos que a componente $\vec{F}_N$ tem como papel exclusivo de mudar a direção do vetor velocidade $\vec{v}$.

Figura XIV-28

Mas mudar a direção (sòmente) não modifica o módulo da velocidade, e portanto não altera o valor da energia cinética da partícula. Consequência:

A componente normal da fôrça não trabalha.

Pelo contrário, a componente $\vec{F}_T$ tem sempre - por construção - a direção do movimento. A componente $\vec{F}_T$ é responsável pela variação do módulo da velocidade. Ela é portanto responsável pela variação da energia cinética da

partícula.

A componente $\vec{F}_T$ trabalha. O problema para ela é unidimensional e consequentemente o trabalho se calcula da maneira que aprendemos nas seções precedentes.

Em resumo, o trabalho da fôrça $\vec{F}$ quando a partícula se desloca de $\Delta\vec{r}$ (muito pequeno!) é o produto de Δr (em módulo) pela componente ortogonal da fôrça sôbre o eixo orientado por $\Delta\vec{r}$:

$$\boxed{W = F_T \cdot \Delta r} \qquad \text{(XIV-31)}$$

Se o que precede lhe parecer obscuro, veja a Fig. XIV-29.

Em (a), a fôrça $\vec{F}$ faz um ângulo α agudo com $\Delta\vec{r}$. Em consequência a componente F_T de $\vec{F}$ sôbre o eixo orientado por $\Delta\vec{r}$ é positiva. (A outra componente de $\vec{F}$ é $\vec{F}_N$, que não trabalha). O trabalho é

$$W = F_T \cdot \Delta r$$

Êsse trabalho é positivo.

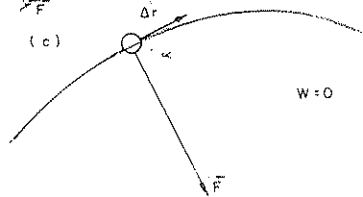
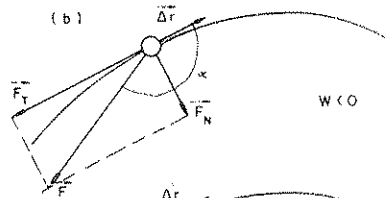
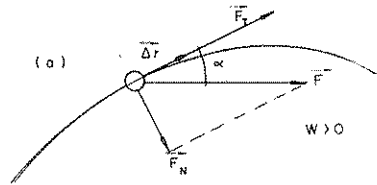



Figura XIV-29

No caso (b), o ângulo α é obtuso. F_T é negativo. O trabalho $F_T \cdot \Delta r$ é negativo.

Finalmente, no caso (c), o ângulo $\underline{\alpha}$ é reto. A fôrça é perpendicular a $\vec{\Delta r}$ e consequentemente à velocidade. F_T é nulo. O trabalho é nulo.

Tôdas as informações precedentes podem ser reunidas numa só expressão do trabalho:

$$\boxed{W = |\vec{F}|.|\vec{\Delta r}| \cos \alpha} \qquad \text{(XIV-32)}$$

Mas veja; os Matemáticos inventaram uma álgebra com vetores, da mesma forma que tinham inventado uma álgebra com números.

Já encontramos, desde cêdo nêste curso, as primeiras operações dessa álgebra: adição e subtração de vetores, e multiplicação de um vetor por um escalar.

Pois bem, há também produtos na álgebra vetorial. Um dêles é o chamado "produto interno" de dois vetores. Êle é definido, para dois vetores quaisquer $\vec{a}$ e $\vec{b}$, da maneira seguinte:

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = |\vec{a}|.|\vec{b}| \cos \alpha$$

em que $\underline{\alpha}$ representa o ângulo entre os dois vetores.

E você vê que a nossa expressão (XIV-32) do trabalho é simplesmente o produto interno da fôrça e do deslocamento (pequeno!) da partícula

$$\boxed{W = \langle\vec{F},\vec{\Delta r}\rangle} \qquad \text{(XIV-33)}$$

Exemplo 1: Uma partícula de massa m desce ao longo de um plano inclinado (Fig. XIV-30).

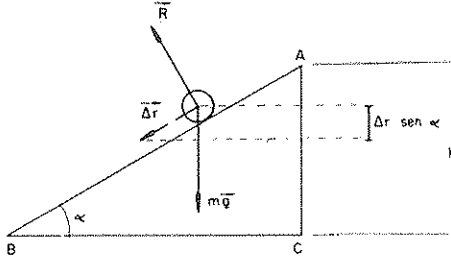
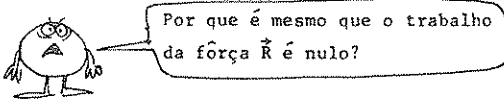



Figura XIV-30

Se o atrito fôr desprezível, as fôrças que agem sôbre a partícula são: o pêso $m\vec{g}$, e a ação $\vec{R}$ do plano, perpendicular ao plano.

Quando a partícula se desloca de $\vec{\Delta r}$, o trabalho da fôrça $\vec{R}$ é nulo.

O trabalho do pêso $m\vec{g}$ é

$$W_{\vec{\Delta r}} = \langle m\vec{g},\ \vec{\Delta r}\rangle$$

ou $$W_{\vec{\Delta r}} = |m\vec{g}|.|\Delta r|\ \cos\ (m\vec{g},\vec{\Delta r})$$

Mas a Fig. XIV-30 lhe mostra que o cosseno do ângulo $(m\vec{g},\vec{\Delta r})$ é igual ao seno do ângulo $\underline{\alpha}$ que o plano faz com a horizontal, não é mesmo? (*) É igual em módulo e sinal.

$$W_{\vec{\Delta r}} = |m\vec{g}|.|\vec{\Delta r}|\ \text{sen}\ \alpha \qquad \text{(XIV-34)}$$

(*) O ângulo $(m\vec{g},\vec{\Delta r})$ e o ângulo $\underline{\alpha}$ são complementares.

Observe agora que $|\Delta\vec{r}|$ sen α é a projeção vertical de $\Delta\vec{r}$, como mostra a figura. Isso lhe permitirá calcular fàcilmente o trabalho total das fôrças que agem sôbre a partícula quando ela desce de A até B.

Com efeito, sendo constante o módulo de $|m\vec{g}|$, você poderá pô-lo em evidência ao fazer a soma das expressões tais que (XIV-34) e correspondentes aos $\Delta\vec{r}$ sucessivos.

Você obterá assim:

$$W_{total} = |m\vec{g}| . \text{(Soma das projeções verticais de todos os } \Delta\vec{r}\text{)}$$

Mas a soma das projeções verticais de todos os $\Delta\vec{r}$ é AC = h. É a altura do ponto de partida acima do plano horizontal que contém o ponto de chegada. Finalmente:

$$W_{total} = mgh \qquad \text{(XIV-35)}$$

Interpretemos fìsicamente êsse resultado.

O trabalho total de tôdas as fôrças que agem sôbre a partícula mede a variação da energia cinética da partícula. E por outro lado, sendo as interações elásticas, a energia mecânica total do sistema Terra-plano - partícula se conserva. De modo que

$$mgh = \Delta E_c = -\Delta E_p .$$

Êsses resultados generalizam os encontrados nos Exemplos 2 da seção XIV-4-2 e da seção XIV-4-3.

Exemplo 2: O Martins amarrou uma pedra de meio-quilo a um barbante, de uns 80cm de comprimento, e gira a pedra em um plano

horizontal. (Fig. XIV-31).

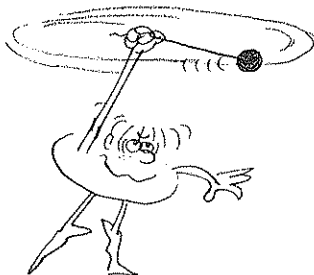



Figura XIV-31

O movimento da pedra é circular uniforme, com aproximação razoável. A frequência é da ordem de duas voltas por segundo.

Muito bem! Quais são as fôrças que agem sôbre a pedra? O pêso e a a tração do barbante. Ambas as fôrças são perpendiculares à velocidade da pedra, concorda?

Consequentemente o trabalho total é nulo: a energia cinética da pedra é constante.

Como também é constante a energia potencial gravitacional do sistema Terra-pedra.

XIV-6 Potência.

Já pensava ter acabado, pràticamente, êsse Capítulo.

Mas veio o Martins com a seguinte conversa...

NO CAPÍTULO XIII O SENHOR EXPLICOU QUE EM DUAS INTERAÇÕES DIFERENTES, A MESMA QUANTIDADE DE MOMENTUM PODE SER TROCADA ENTRE AS PARTÍCULAS...

E DAÍ...

E DAÍ...

CONSIDEREMOS O EXEMPLO SEGUINTE: SE O SENHOR AINDA FÔSSE CAPAZ DE SUBIR À CORDA...

DUVIDA?

O SENHOR LEVARIA PROVAVELMENTE UNS DEZ MINUTOS PARA SUBIR...

INTERAÇÃO "TERRA - O SENHOR"... TAREFA A REALIZAR: AUMENTAR A ENERGIA POTENCIAL DE INTERAÇÃO DE UNS 1000 JOULES!

QUEM PAGA POR ISSO É O SENHOR...
QUANTO?

100 JOULES POR MINUTO. MAS SE O SENHOR FIZESSE A LOUCURA...

MARTINS!!

DESCULPE, PROFESSOR! EU QUERIA DIZER: SE O SENHOR FIZESSE A IMPRUDÊNCIA DE QUERER SUBIR EM UM MINUTO...
E ENTÃO?

ENTÃO O SENHOR TERIA QUE GASTAR ENERGIA À RAZÃO DE 1.000 JOULES POR MINUTO!

E EU NÃO ACREDITO QUE O SENHOR SEJA CAPAZ DE TAL PROEZA!

O que o Martins quer dizer é que, numa interação, não é sòmente a uantidade de energia gasta para realizar uma tarefa que importa.

O que importa também é a rapidez com que se gasta essa energia.

O que importa também é o valor de $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ ... ou de $\frac{dE}{dt}$.

$\frac{\Delta E}{\Delta t}$ é a taxa de transformação média da energia do sistema.

$\frac{dE_p}{dt}$ é a taxa de transformação instantânea da energia:

A taxa de transformação de energia é chamada potência P da interação.

A potência média durante o intervalo Δt, em que a quantidade ΔE de energia foi transformada, é

$$\langle P \rangle = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

A potência instantânea é

$$P = \frac{dE}{dt}$$

Como?
Como é que se mede uma potência instantânea?
FRANCAMENTE!
Faça o gráfico E (energia transformada) vs t
e meça coeficientes angulares de tangentes!
Ou já tinha esquecido?

A unidade de potência é o Joule/segundo, ou Watt (W).

Os engenheiros utilizam também o Cavalo-vapor (CV), que vale 735 Watt.

<u>Exemplo</u>: Você deixa cair uma pedra do terraço de um edifício.

Há interação pedra-Terra.

Durante a interação a energia potencial do sistema transforma - se em energia cinética.

Como $v = gt$, $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mg^2t^2$, ou $E = \frac{1}{2} mg^2t^2$.

A energia transformada cresce como o quadrado do tempo, e o gráfico $\underline{E}$ vs $\underline{t}$ é um arco de parábola (Fig. XIV-32).

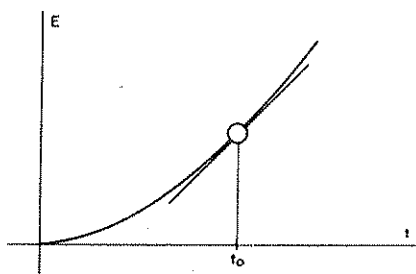



Figura XIV-32

A potência da interação é, no instante t_o, o valor instantâneo de $\frac{dE}{dt}$.

Na seção III-5-1 do Capítulo III (*) aprendemos a calcular a taxa de variação nêsse caso simples:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{t_o} = mg^2 t_o$$

A potência instantânea cresce proporcionalmente ao tempo.

Há outra maneira de expressar a potência de uma transformação, ou de uma transferência, de energia.

Basta que você se lembre que o trabalho $W = F.\Delta s$ da fôrça que age sôbre uma partícula mede a variação de energia cinética da partícula.

Em Δt unidades de tempo, a quantidade de energia $F.\Delta s$ é transferida para a partícula - se W fôr positivo -, ou cedida por ela - se W fôr negati-

(*) Física com Martins e Eu - Volume 1 - página 90.

vo - .

A potência da transformação é

$$P = \frac{F.\Delta s}{\Delta t}$$

E sendo $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$, velocidade da partícula,

$$\boxed{P = F.v} \qquad (*)$$

Exemplo: Um trem anda com velocidade de 30m/s - aproximadamente 110 km/h. A locomotica exerce uma fôrça de $2,0 \times 10^3$N sôbre a barra de tração que a acopla aos vagões.

A potência da transmissão de energia da locomotiva aos vagões é P = $= 2 \times 10^3 \times 30 = 6,0 \times 10^4$ Watt.

Isto representa aproximadamente 800CV.

XIV-6 A energia em Física, e sua conservação.

A energia mecânica é sòmente um "compartimento" de um conceito muito mais geral: o de energia.

Mais uma vez, o que é necessário para realizar tarefas.

Voltamos assim, fechando o ciclo, à conversa que Martins e eu tive-

(*) Cuidado! Essa expressão da potência é válida até onde a expressão F.Δs para o trabalho fôr ela mesma válida. Isto é, no caso das interações unidimensionais. No caso geral, $P = \langle\vec{F},\vec{v}\rangle$. Veja a expressão geral do trabalho na seção XIV-5.

mos no início do Capítulo.

Energia é uma grandeza associada a todo e qualquer sistema que interage.

Acontece que, conforme o sistema e conforme a maneira de interagir, as tarefas realizáveis com a energia disponível mudam de categoria.

A energia associada a um sistema de poucas partículas que interagem mecânicamente é uma energia ordenada, uma energia "bem comportada". A energia cinética no RCM está disponível e fàcilmente utilizável. A energia potencial armazenada em uma mola, ou no campo gravitacional por exemplo (*), é também uma energia bem domesticada, de fácil utilização.

A coisa começa a se complicar quando o número de partículas que interagem começa a crescer.

Pense por um instante, por exemplo, nas interações entre as moléculas do ar que você respira.

São muitas moléculas. Da ordem de 10^{24} em uma sala de dimensões comuns.

E são muitas interações: vários bilhões por segundo e por centímetro cúbico.

Interações elásticas?

Sim, interações elásticas.

No entanto, você seria capaz de imaginar um dispositivo simples que lhe permita utilizar a energia cinética dessas moléculas?

(*) Veja o Capítulo XV, onde aprenderemos algo a respeito dos campos e da energia associada.

Não, provàvelmente. A razão é que as moléculas do ar andam desordenadamente, em todos os sentidos.

E no entanto, o Problema XIV-36 lhe mostrará que a energia cinética existente em um mol de ar é longe de ser desprezível!

Êsse exemplo, e muitos outros que você poderá imaginar sem dificuldade, mostra que o conceito de ordem está estreitamente associado à "utilizabilidade" da energia.

À energia cinética associada ao movimento desordenado de um número muito grande de partículas micro- ou submicroscópicas, dá-se o nome de energia térmica.

Assim é que energia térmica está associada aos movimentos desordenados das moléculas de um fluído, aos átomos e íons de um cristal.

Você aprenderá mais tarde que a energia térmica se contabiliza de maneira diferente que a energia cinética.

Não é de estranhar. A energia cinética (ou melhor suas variações) medem-se pelo trabalho das fôrças de interação.

Mas onde, e como, procurar as fôrças em um sistema de 10^{24} partículas?!

Deve-se então lançar mão de outros processos. Aprenderemos que a energia térmica, ou melhor suas variações, medem-se por algo que chamaremos calor.

Há outra maneira de contabilizar a energia que se transfere de um sistema para outro. Em certas circunstâncias, a energia disponível numa interação não transita sob forma cinética, ou térmica, e sim sob forma de radiação. Quando você risca um fósforo, por exemplo, parte da energia que você gasta ao atritar a cabeça do fósforo contra a caixa aparece primeiro sob forma térmica. A seguir, a energia térmica "liberta" a energia armazenada potencialmente em certas reações químicas entre as substâncias que compõem a cabeça "ativa" do fósforo. Essa energia, ou melhor parte dela, escapa do sistema por radiações eletromagnéticas: é a luz emitida pela chama.

Não pense que a energia-radiação aparece sòmente em raros casos particulares. Pelo contrário.

Em qualquer interação (*), átomos ou moléculas são levados a esta -

(*) Com exceção talvez da interação puramente gravitacional.

dos excitados.

Ao voltarem para o estado normal, êsses átomos ou moléculas emitem energia-radiação.

O que pode acontecer é que a quantidade de energia-radiação seja desprezível em comparação com a energia-trabalho ou com a energia-calor postas em jôgo na interação.

Eu quero agora concluir essa breve incursão em territórios ainda inexplorados por nós.

Há em Física uma grande Lei de Conservação, cuja importância é comparável à Lei de Conservação do momentum.

É a <u>Lei de Conservação da Energia total de um sistema isolado</u>.

O enunciado é muito simples:

"Se um sistema é isolado de tal maneira que nenhuma energia, sob qualquer forma que seja, possa atravessar em qualquer sentido os limites que separam o sistema do resto do Universo, então a quantidade de energia contida no sistema se conserva constante".

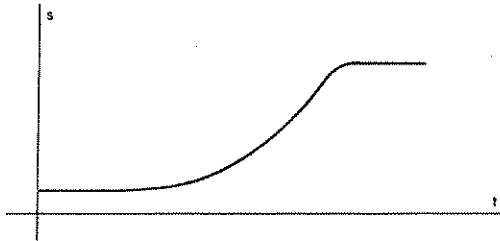
Você já entendeu que a expressão <u>energia</u>, no enunciado acima, se refere a qualquer forma; mecânica, térmica, radiante...

<u>Exemplo</u>: Voltando à seção XIV-2-2, você se lembra que andamos pregando pregos em banha, para familiarizar-nos com o conceito de energia cinética. Quando o carrinho interage com a Terra por intermédio da lata com banha, a energia mecânica do carrinho se anula (no referencial do Laboratório, que é o RCM do sistema Terra-carrinho).

No entanto, a energia <u>total</u> se conserva. Por meio de medidas precisas, observaríamos que a temperatura da agulha metálica aumentou um pouco. E um pouco de banha fundiu.

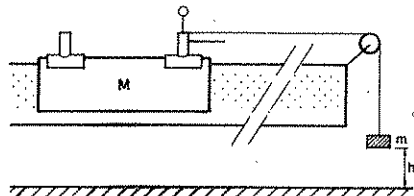
PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas estrelados (*) devem ser discutidos em aula, com o seu Professor).

XIV-1 Os gráficos s vs t das Fig. XIV-2, 3 e 4, são do tipo seguinte:

Há cinco fases distintas:

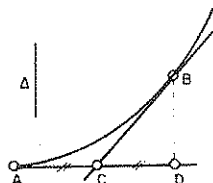
1) o carrinho está em repouso sôbre a calha.
2) acelera-se o carrinho até que êle adquira uma velocidade v.
3) o carrinho anda em movimento uniforme com velocidade v.
4) a agulha penetra na banha; o carrinho é decelerado até parar.
5) o carrinho permanece em repouso.

a) nos gráficos do texto, identifique e separe as cinco fases.
b) meça nos gráficos a velocidade v da fase de movimento uniforme. As "pautas" paralelas ao eixo dos tempos estão espaçadas de 5,0 cm em verdadeira grandeza. O eixo dos tempos está graduado em $\frac{1}{20}$ s.

*XIV-2 Nas experiências com carrinhos da seção XIV-2-2, e que você começou a analisar no problema precedente, a massa do carrinho era 0,350 kg. A aceleração da 2ª. fase foi produzida pelo sistema representado na figura: um fio de nylon muito fino,

amarrado ao carrinho, passa por cima de uma polia e sustenta uma massa m. Abandonando-se o sistema, a massa m cai, acelerando o carrinho. Assim que a massa m atinge o chão, a aceleração se anula e o carrinho continua com a velocidade v que êle tinha naquêle instante.

a) meça no gráfico da Fig. XIV-2 a aceleração da segunda fase. Para tanto, você precisará determinar com precisão a duração dessa fase.

Sugestão: supondo-se a aceleração uniforme, o gráfico s vs t é uma parábola.

E sendo uma parábola, você pode utilizar uma propriedade geométrica que aprendemos no Capítulo VIII (movimento dos projéteis): se AC e BC são duas tangentes nas extremidades do arco AB de uma parábola, e se a tangente AC encontra em D a paralela tirada por B ao eixo da parábola, AC = CD.

b) qual é a massa m que acelerou o carrinho?

c) de que altura h caiu a massa m?

XIV-3 A figura representa os gráficos v vs t da interação de um sistema isolado de duas partículas. A massa da partícula (1) é 0,50kg.

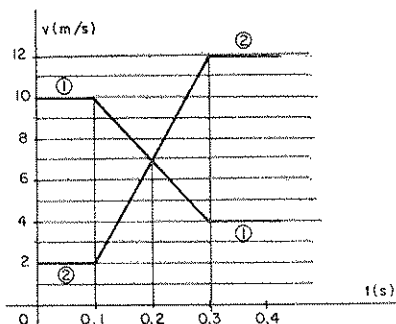
a) o referencial em que foi estudada a interação é um referencial inercial?

b) qual é a massa da partícula (2)?

c) qual é o valor da fôrça de interação?

d) quais são as variações de posição das partículas durante a 1ª fase da interação? De quanto varia a distância entre as partículas durante essa fase?

e) Calcule os trabalhos das fôrças que agem sôbre as partículas du-

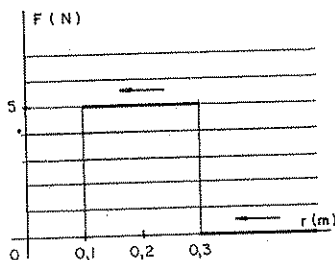
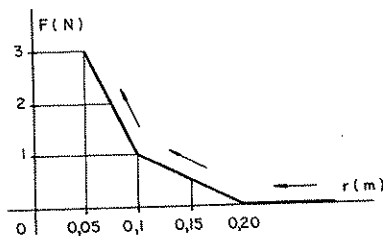
rante a 1a. fase. Calcule também o trabalho da fôrça de interação durante essa fase.

f) qual é a variação da energia cinética de cada partícula durante a 1a. fase? Qual é a variação da energia cinética total do sistema durante essa fase? Compare essas variações com os trabalhos calculados em (e).

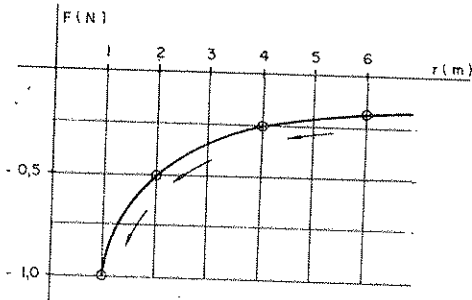
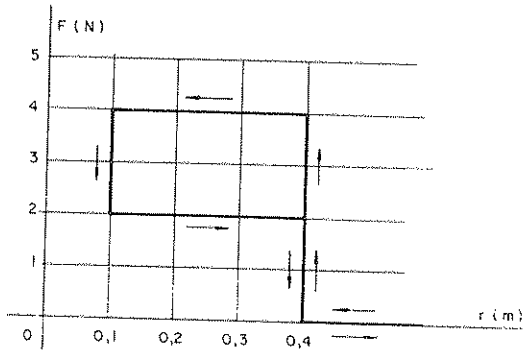
g) qual é o valor da energia cinética total depois da interação? Compare com o valor da energia total antes da interação.

XIV-4 O gráfico proposto a seguir representa a fôrça de interação entre duas partículas em função da distância entre as mesmas.

Acho que você não terá dificuldades em interpretá-lo. A interação é repulsiva e se inicia quando a distância entre as partículas se torna igual a 0,30m.

A primeira fase termina quando as partículas distam 0,10m. Durante essa fase a fôrça de interação é constante e igual a 5,0N. Observa que o gráfico deve ser lido da direita para a esquerda.

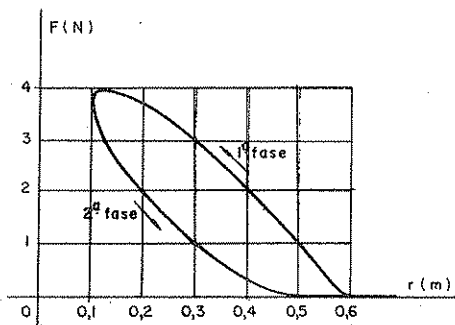
De quanto variou a energia cinética total do sistema durante a primeira fase?

XIV-5 Mesmo exercício e mesma pergunta que o precedente, com o gráfico abaixo:

XIV-6 Numa interação atrativa (tipo gravitacional) a fôrça de interação varia com a distância entre as partículas conforme o gráfico proposto.

De quanto varia a energia cinética total do sistema quando a distância entre as partículas diminui de 4,0 até 2,0m?

XIV-7 A fôrça de interação entre duas partículas é repulsiva e varia com a distância entre as partículas conforme o gráfico proposto.

Você observa que nêste caso a fôrça de interação na primeira fase (as partículas se aproximam), é diferente da fôrça na segunda fase (as partículas se afastam). Muito esquematizado, é o que aconteceria com uma mola...." cansada".

De quanto varia a energia cinética total do sistema durante a inte-

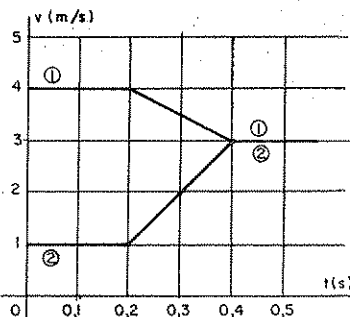
ração tôda?

XIV-8 Êsse exercício é semelhante ao precedente, mas as variações da fôrça de interação com a distância estão provàvelmente mais perto da realidade.

De quanto variou a energia cinética total do sistema durante a interação?

XIV-9 A figura ao lado representa o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ da interação entre duas partículas. A massa da partícula (1) é 0,20 kg.

a) Qual é a massa da partícula 2?

b) Quais são as variações das energias cinéticas das duas partículas no intervalo (0,2s, 0,3s)?

Qual é a variação da energia cinética total do sistema durante êsse mesmo intervalo?

c) Qual é o valor da fôrça de interação?

d) Qual é o trabalho da fôrça de interação durante o intervalo (0,2s, 0,3s)?

O que é que você conclui?

XIV-10 No instante em que o carrinho da figura a seguir passa por baixo do tijolo, corta-se a corda de suspensão.

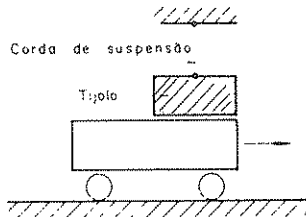
O tijolo se imobiliza em relação ao carrinho, depois de uma fase de deslizamento relativo, e o conjunto continua com velocidade constante. Despreza-se o atrito entre o carro e o plano horizontal.

Dados: massa do carrinho = 2,0kg

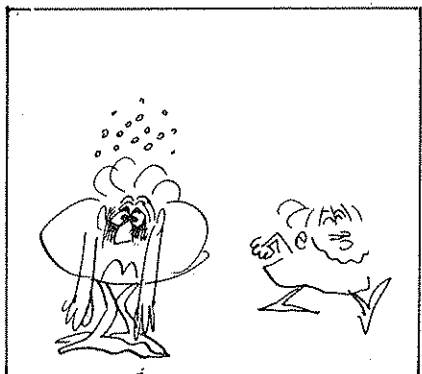
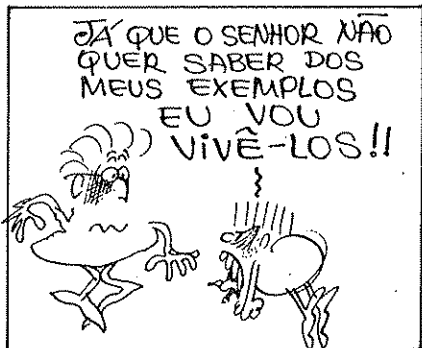
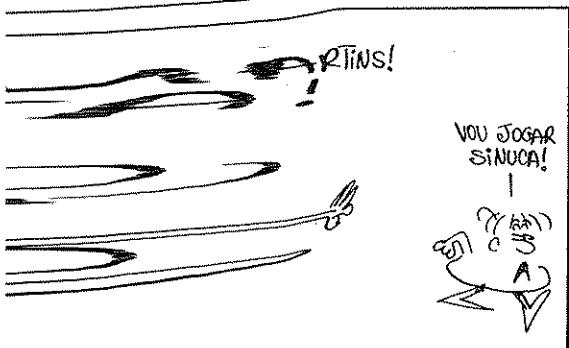
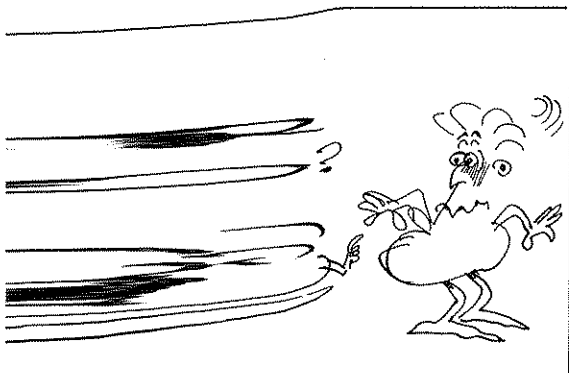
massa do tijolo = 1,0kg

velocidade inicial do carrinho = 3,0m/s

a) Qual é a velocidade final do conjunto?

b) Qual é a razão entre a energia cinética inicial e a energia cinética final do conjunto carrinho-tijolo?

*XIV-11 Às vêzes, a tarefa que se quer realizar numa interação é simplesmente transferir energia cinética de uma partícula para outra.

Por exemplo...

MARTINS! GOSTARIA QUE ME DEIXASSE EM PAZ PELO MENOS QUANDO ESTOU FAZENDO MEUS PROBLEMAS!!
BOM, JÁ QUE O SENHOR DISPENSA AJUDA!
RTINS!
VOU JOGAR SINUCA!
JÁ QUE O SENHOR NÃO QUER SABER DOS MEUS EXEMPLOS EU VOU VIVÊ-LOS!!
NHOR NÃO SABE QUE
TERAÇÕES SINUQUEANAS,
SE QUER É POR UMA
EM MOVIMENTO
TENDO NELA COM
UTRA?

Pois é!

Mas continuando com o problema, suponha que um alvo de massa m_a está em repouso no Laboratório, e que você quer movimentar êsse alvo com um projétil de massa m_p que você atira contra êle.

a) Faça o gráfico da interação, supondo-se que o coeficiente de restituição é e $(0 < e \leq 1)$.

b) Qual é, em função da velocidade v^* no Laboratório, e da velocidade V_p do projétil no RCM, o momentum do projétil antes da interação? Qual é o momentum do alvo depois da interação?

c) Qual é a energia cinética $(E_c)_p$ do projétil antes da interação?

Qual é a energia cinética $(E_c)_a$ do alvo depois da interação.

d) A razão $\frac{(E_c)_a}{(E_c)_p}$ representa evidentemente a fração da energia inicial do projétil transferida para o alvo. Quanto vale essa razão, em função da razão $k = m_a/m_p$ entre a massa do alvo e a massa do projétil, e do coeficiente de restituição e?

e) Determine e e k para que a razão precedente seja máxima.

*XIV-12 Continuando na linha do problema precedente, faça o gráfico $\frac{(E_c)_a}{(E_c)_p}$ da fração da energia do projétil transferida para o alvo, em função da razão k entre a massa do alvo e a massa do projétil. Suponha a interação elástica.

*XIV-13 E ainda na linha do problema XIV-11, tente resolver o seguinte:

É possível que, numa interação inelástica o projétil transfira tôda a sua energia cinética ao alvo?

Raciocine, sem cálculos!

*XIV-14 Aquêle problema XIV-11 está dando pano para mangas! Você deve estar agora em condições de analisar uma experiência realizada por Chadwick

em 1932 e, com êle,... redescobrir o neutron (*).

Aí vai o relato sucinto da experiência:

Bombardeando Berílio com partículas α, obtém-se uma "radiação" que pode interagir com diversos alvos. O grupo do Laboratório Cavendish (onde estava Chadwick), e outros, tinham observado que ao interagir com protons em repouso no Laboratório, a energia máxima dos protons "cotucados" pela tal radiação era 5,7Mev. Substituindo-se os protons por nitrogênio, a energia máxima, dos núcleos de nitrogênio "cotucados" era 1,2Mev.

Chadwick afirmava que a explicação mais simples para êsses dados era supor que a "radiação" emitida pelo Berílio consistia em partículas neutras (≡ sem carga) de energia bem determinada. Já em 1929, Rutherford, tinha previsto a existência dessas partículas, chamando-as "neutrons".

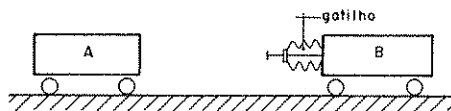
Sabendo-se que a massa do proton é 1 u.a.m. (unidade atômica de massa) e que a do nitrogênio é 14 u.a.m, acompanha Chadwick nos seus cálculos (elementares!), e "descubra" a massa do neutron, assim como a energia dos neutrons emitidos pelo Berílio.

*XIV-15 Dois carrinhos A e B interagem unidimensionalmente. As massas são $m_A = 0{,}40kg$, $m_B = 0{,}20kg$.

Mas o carrinho B não é um carrinho comum.

Êle traz uma caixa que contem um doce. (Veja a figura abaixo).

Para abrir a caixa, há um gatilho que pode ser acionado pelo carrinho A. Mas isto requer 15 J de energia.

Quais são as velocidades que você possa comer o doce gastando a menor quantidade possível de energia?

Esta é a caixa onde está o doce

(*) Chadwick era na época um dos Físicos do grupo de Rutherford, em Cambridge (Inglaterra).

*XIV-16 Vamos tentar comer mais doces (veja o problema precedente).

A regra do jôgo, agora, é que um dos carrinhos deve estar parado no Laboratório, antes da interação.

Qual é a menor quantidade de energia que lhe permitirá comer o doce?

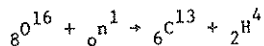
*XIV-17 Generalizemos o problema precedente. Se uma partícula de massa m_1 interage unidimensionalmente com outra de massa m_2, qual é a energia disponível para "realizar tarefas", em função da velocidade <u>relativa</u> $\underline{v}$ das partículas antes da **interação**?

XIV-18 E continuando na veia dos Problemas XIV-16 e XIV-17, suponha que uma das partículas esteja parada no Laboratório antes da interação.

a) Qual é a razão entre a energia "roubada" pelo fantasma e a energia inicial do projétil?

b) Qual é a razão entre a energia disponível e a energia inicial do projétil?

XIV-19 Bombardeando-se oxigênio com neutrons, obtém-se o isótopo C^{13} do carbono, e hélio:

$$_8O^{16} + {}_on^1 \rightarrow {}_6C^{13} + {}_2H^4$$

Se no entanto você calcular a massa total do segundo membro, você verá que ela é um pouco maior que a do primeiro membro.

Ah! disse Einstein, então a tarefa a realizar é aumentar a massa em repouso de Δm, e isso custará $\Delta m.C^2$.

Feitos os cálculos, acha-se que o preço é 2,20 Mev.

Suponha então que o alvo (oxigênio) está em repouso no Laboratório. Qual é a menor energia cinética dos neutrons que produzirão a reação indicada?

XIV-20 Uma partícula de massa 0,60kg e cuja velocidade inicial, no Laboratório, é 6,0m/s, vai interagir elàsticamente com outra partícula cuja massa é 0,20kg e cuja velocidade é 2,0m/s. Quais são as velocidades das partículas depois da interação?

XIV-21 Uma partícula $\underline{\alpha}$, cuja massa é $6,64 \times 10^{-27}$kg, e cuja velocidade é 1,63 $\times 10^{7}$m/s, colide elàsticamente e unidimensionalmente com um núcleo de ouro ($m = 3,27 \times 10^{-25}$kg) inicialmente em repouso no Laboratório. Quais são as velocidades do projétil e do alvo depois da colisão?

*XIV-22 A fissão do urânio U^{235} em um reator é provocada pela captura de neutrons <u>lentos</u> (E_c < 1ev) pelo núcleo do urânio. Na fissão, dois outrês neutrons <u>rápidos</u> (E_c > 1 Mev) são liberados. Para sustentar a reação, pelo menos um dêsses neutrons deve provocar uma nova fissão, e consequentemente deve ser freado, para diminuir sua energia cinética. Por essa razão, todo reator de fissão possui um "moderador" para frear os neutrons rápidos.

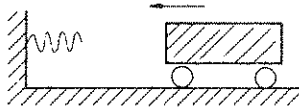
Na sua opinião, qual é a substância que seria o moderador ideal?

(Essa substância não é utilizada, por razões diferentes das que você deve alinhar aqui).

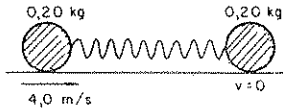
*XIV-23 Você gastou 12 J para comprimir uma mola (suposta ideal!). Você coloca a mola entre dois carrinhos cujas massas são $m_1 = 0,40$kg e $m_2 = 0,20$kg, e liberta então o gatilho que mantinha a mola comprimida.

De que maneira aquêles 12 J de energia vão se repartir entre os dois carrinhos?

XIV-24 Um carrinho cuja massa é 2,0kg é lançado com velocidade de 6,0m/s contra uma mola amarrada a um suporte fixo no Laboratório, e cujo coeficiente é $2,0 \times 10^{2}$N/m.

Qual é a compressão máxima da mola?

*XIV-25 Duas partículas de mesma massa m = 0,20kg interagem por meio de uma mola, sôbre um plano horizontal com atrito desprezível.

A mola tem comprimento relaxado de 20cm e coeficiente k = $1,6x10^2$N/ /m. Em determinado instante, a situação no Laboratório é a representada na figura abaixo. A mola tem o seu comprimento relaxado, uma das partículas está parada e a outra tem velocidade de 4,0m/s.

Qual será o menor comprimento da mola, no decorrer da interação?

XIV-26 O problema é o mesmo que o precedente, com a seguinte modificação: no instante em que o sistema tem a configuração representada na figura, a mola se encontra alongada de 5,0cm. Qual será o comprimento mínimo da mola no decorrer da interação?

XIV-27 O Martins lança uma pedra para cima com a atiradeira. Quando êle alonga o elástico da atiradeira de 16cm, a pedra sobe até 20m.

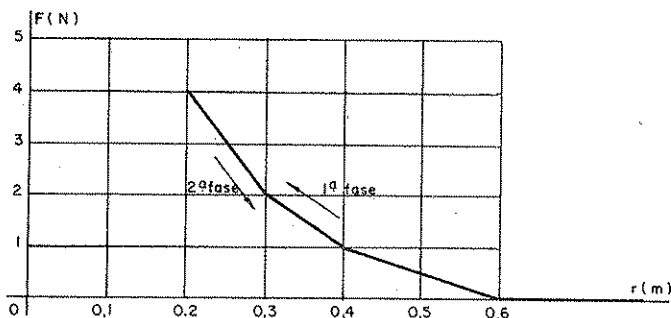
Se êle alongasse o elástico de 8,0cm sòmente, até que altura subiria a pedra?

XIV-28 Uma partícula de massa 0,50kg e outra de massa 0,30kg interagem unidimensionalmente. As velocidades das partículas no Laboratório, antes da

interação, são respectivamente 8,0m/s e zero. O coeficiente de restituição é 0,50.

Quais são as velocidades das partículas no Laboratório depois da interação?

O momentum total se conserva nessa interação?

*XIV-29 O gráfico abaixo representa a lei de fôrça de uma interação entre duas partículas, em função da distância que as separa. A interação é elástica.

a) Qual é a variação da energia potencial do sistema quando a distância passa de 0,4m para 0,3m no decorrer da 1a. fase da interação?

b) Qual é a variação da energia potencial do sistema quando a distância entre as partículas passa de 0,3m para 0,4m no decorrer da 2a. fase?

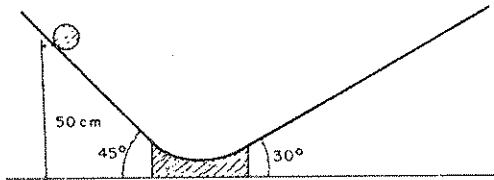
c) Qual é a variação total da energia potencial do sistema durante a 1a. fase? Durante a 2a. fase?

d) Arbitrando-se o valor zero à energia potencial do sistema quando as partículas estão muito afastadas uma da outra, qual é o valor da energia potencial do sistema quando a distância entre as partículas passa pelo valor 0,3m no decorrer da 1a. fase? No decorrer da 2a. fase?

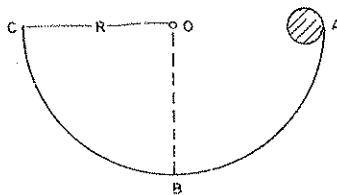
XIV-30 Avalie a variação de energia potencial gravitacional do sistema "você-Terra" quando você sobe três andares.

XIV-31 Considere o conjunto dos dois planos inclinados representados na figu-

ra abaixo. Larga-se uma bola sôbre o plano da esquerda, a uma altura de 50 cm acima do plano horizontal de referência.

Sendo desprezíveis os atritos, até que altura acima do mesmo plano horizontal subirá a bola sôbre o plano inclinado da direita?

*XIV-32 A figura abaixo representa a seção de uma calha cilíndrica de raio R = 50cm. Larga-se uma partícula de massa m = 100g da posição A.

Ao longo do arco AB a calha exerce sôbre a partícula uma fôrça de atrito de módulo constante igual a 0,50 N. Entre B e C o atrito é desprezível.

A que altura acima de B subirá a partícula sôbre o arco BC?

XIV-33 Se uma partícula interage com a Terra, você sabe que a Terra não participa da brincadeira, no que toca a energia. Se a interação fôr elástica, a energia total do sistema é a soma da energia potencial de interação, e da energia cinética da partícula. E essa energia de conserva.

Suponha então que uma partícula interage com a Terra por meio de u-

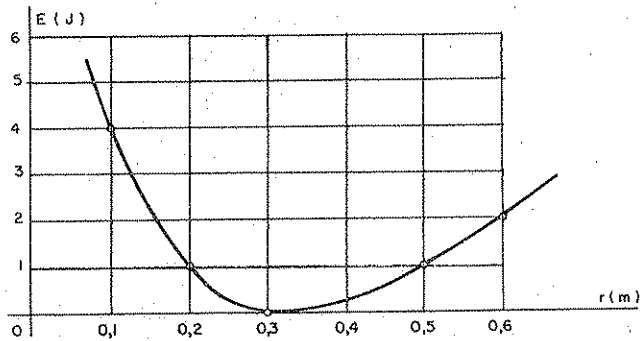
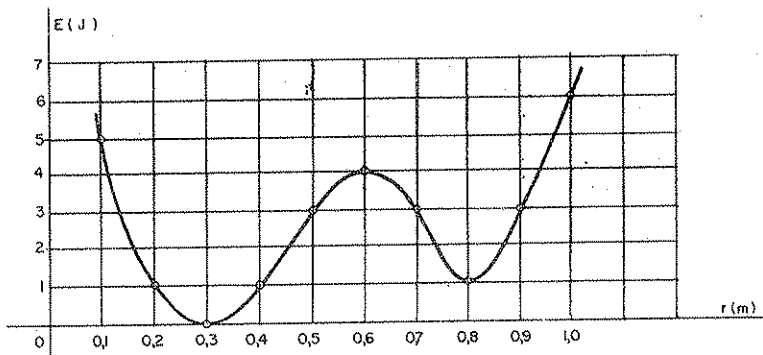
ma mola, cujo poço de potencial está representado na figura abaixo.

A distância r̲ representa o comprimento da mola.

Suponha que a energia total do sistema seja igual a 2,0 J.

a) Qual é o valor máximo da energia cinética da partícula?

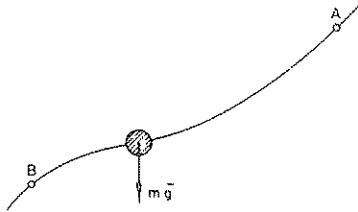
b) Quais são os valores máximos e mínimos da distância r̲?

c) Qual é o valor da fôrça de interação para r = 0,20m?

XIV-34 Suponha que duas partículas interagem unidimensionalmente, com o potencial representado na figura abaixo, onde r̲ representa a distância entre as partículas.

a) Se a energia total fôr igual a 3,0J, quais são os intervalos permitidos para o valor da distância r entre as partículas?

b) Para que valores de r é nula a fôrça de interação? Quais dêsses valores correspondem a uma configuração estável das partículas?

*XIV-35 Mostre que se uma partícula se desloca de A até B quaisquer no campo gravitacional terrestre, suposto uniforme, o trabalho do pêso $m\vec{g}$ da partícula é igual a mgh em valor absoluto, em que h representa a diferença de nível entre os pontos A e B.

Conclua em consequência que êsse trabalho independe do caminho seguido pela partícula entre os dois pontos.

Uma fôrça que possui essa propriedade é chamada fôrça conservativa.

*XIV-36 Avalie a energia cinética total do ar contido na sala de aula.

À temperatura ambiente, a velocidade das moléculas do ar é da ordem de 500 m/s.

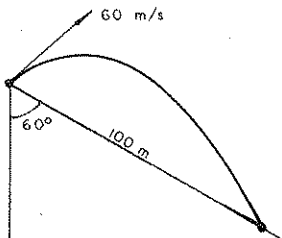
XIV-37 Um projétil de revólver tem massa de 10g e velocidade de $3{,}0\times10^2$ m/s.

O projétil atravessa uma táboa de 2,0cm de espessura fixa no Laboratório. Depois de atravessar, a velocidade do projétil cai para 50 m/s.

Qual é o valor da fôrça média de resistência exercida pela táboa sôbre o projétil?

*XIV-38 Um projétil atirado com velocidade inicial de 60m/s tem um alcance de 100m sôbre um plano fazendo o ângulo de 60° com a vertical.

Qual é a velocidade de impacto? (A figura está representada a se-

guir.)

XIV-39 Você deixa cair uma bola de **tênis de** uma altura de 1,0m, e observa que ela repica até 0,80m. Qual **é o coeficiente** de restituição da interação bola piso?

XIV-40 Uma partícula de massa 0,60kg interage elàsticamente com outra partícula de massa 0,20kg. As velocidades das partículas antes da interação são respectivamente 6,0m/s e 1,0m/s.

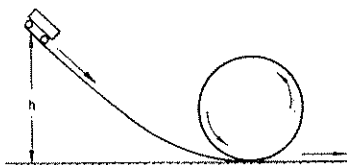
Quais são as velocidades das partículas depois da interação?

XIV-41 Mesmo problema que o precedente com os seguintes dados:

m_1 = 0,20kg: velocidade inicial: 8,0m/s

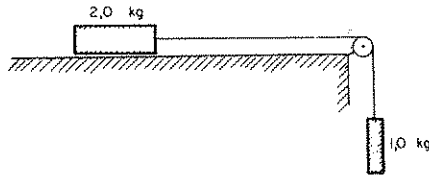
m_2 = 0,10kg; velocidade inicial: 2,0m/s

*XIV-42 O "looping the loop" de um autorama tam um diâmetro de 40cm.

Desprezando os atritos, determine de que altura mínima h você deverá deixar cair o carrinho ao longo da rampa de acesso para que êle chegue a percorrer todo o loop.

XIV-43 Um elétron, cuja massa é $9,1 \times 10^{-31}$kg é acelerado a partir do repouso por um campo elétrico. Depois de percorrer 2,0cm a velocidade do elétron é $2,0 \times 10^{6}$m/s.

Qual é a fôrça média exercida pelo campo sôbre o elétron?

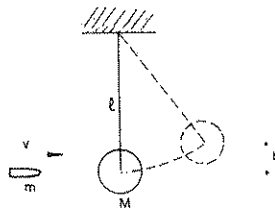
XIV-44 No sistema representado na figura abaixo, não há atrito entre a mesa e o corpo de 2,0kg.

Qual é a velocidade dêsse corpo quando êle percorreu 50cm a partir do repouso?

XIV-45 Repita o problema precedente, supondo-se agora que há uma fôrça de atrito de 1,0N entre o corpo de 2,0kg e a mesa.

*XIV-46 Você lança uma pedra verticalmente para cima. Faça o gráfico de energia da interação pedra-Terra.

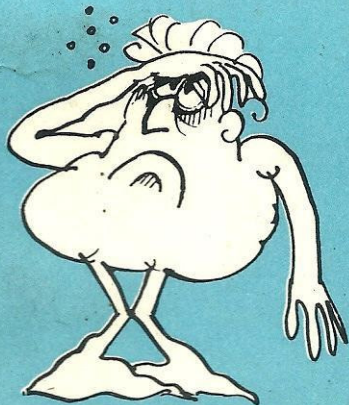
*XIV-47 Um proton com 6 Bev de energia cinética interage com outro proton em repouso no Laboratório. Quanta energia é disponível para "realizar tarefas"?

XIV-48 A figura ao lado representa os elementos essenciais de um <u>pêndulo balístico</u>, aparêlho destinado a medir a velocidade de projéteis.

Um projétil com massa <u>m</u> e velocidade <u>v</u> colide com a bola M de um pêndulo de comprimento <u>ℓ</u>.

Depois da colisão a bola (com o projétil dentro) sobe até uma altura <u>h</u>.

Determine <u>v</u> em função de <u>M</u>, <u>m</u>, <u>g</u>, <u>h</u>.

PIERRE LUCIE

FÍSICA COM MARTINS E EU

VOLUME II

DINÂMICA DA PARTÍCULA

FASCÍCULO 3

ILUSTRAÇÕES DE

Henfil

ÍNDICE

CAPÍTULO XV

CAPÍTULO XV

O OSCILADOR HARMÔNICO

 XV-1 Onde se trata, novamente, de poços de potencial.

Com o Capítulo XIV, terminamos a estruturação conceitual da Dinâmica da partícula.

Nêste Capítulo e no seguinte, eu quero mostrar-lhe que os seus conhecimentos já são suficientes para que você possa entender, nem que seja em primeira aproximação, alguns fenômenos naturais muito importantes.

E muito interessantes também.

Repare no galho da árvore balançado pelo vento.

Repare nas oscilações do carro que passa na estrada.

E do barco no mar.

Lembre-se do balanço em que brincou quando pequeno.

Êstes, e muitos outros que virão com certeza à sua memória, são exemplos de .... coisas que oscilam em tôrno de posições de equilíbrio estáveis.

No Capítulo anterior, falamos de poços de potenciais.

Voltemos juntos ao assunto, por alguns instantes.

Uma partícula de massa m "brinca" com outra de massa M >>> m. (Fig. XV-1).

Você já sabe que, na brincadeira, a partícula de massa M só se preocupa em conservar constante o momentum total. A energia cinética é privilégio da menorzinha.

E há também, evidentemente, energia potencial de interação.

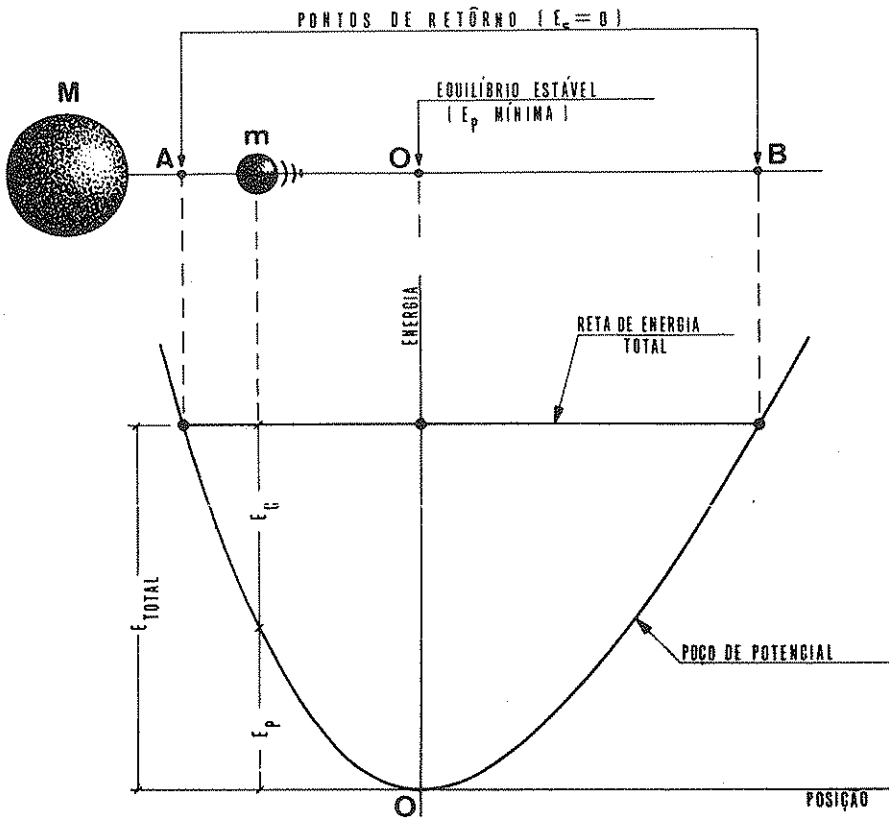
Figura representada na página seguinte.

PONTOS DE RETÔRNO ($E_c = 0$)
EQUILÍBRIO ESTÁVEL
(E_p MÍNIMA)
M
m
A
O
B
ENERGIA
RETA DE ENERGIA TOTAL
E_c
E_{TOTAL}
E_p
POÇO DE POTENCIAL
O
POSIÇÃO

Figura XV-1

RÉ... RÉ... RÉ... MAS NÃO CUSTAVA NADA DIZÊ-LO DESDE O INÍCIO! E COM CALMA...

Mas, como ia dizendo antes do Martins meter-se na conversa, há energia cinética da partícula de massa m, e há energia potencial de interação.

Suponha que a energia potencial de interação varie com a posição conforme a curva da Fig. XV-1.

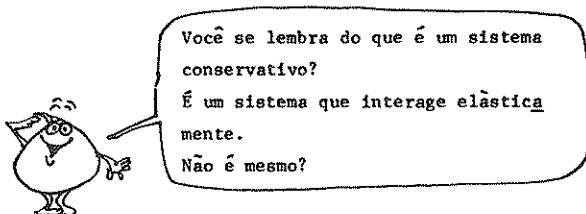
No instante em que eu "fotografei" as duas partículas, a de massa m aproximava-se da outra, indo para a esquerda.

Nessa posição a energia potencial valia E_p. (Veja bem, na figura E_p é a ordenada da curva, no ponto correspondente à posição representada).

E a energia cinética valia E_c.

Coloquei o segmento que mede E_c por cima do segmento que mede E_p.

Obtive assim um segmento vertical que mede a energia total do sistema no instante considerado.

E como o sistema é conservativo...

... a energia total é sempre constante.

Qualquer que seja a posição da partícula de massa m.

Em consequência, a extremidade superior daquêle segmento que mede a energia total, descreve uma reta "horizontal" (i.e., paralela ao eixo das posições).

Essa reta horizontal é chamada "reta de energia total".

Enquanto isto, a extremidade superior do segmento que mede a energia potencial E_p descreve a curva que é o gráfico da energia potencial de interação, em função da posição da partícula de massa m.

Ah! É aqui que a coisa se torna interessante: se existir uma configuração de equilíbrio estável para o sistema, o gráfico de potencial passará por um mínimo na posição correspondente a essa configuração.

Analisemos juntos o gráfico de potencial da Fig. XV-1.

Êle passa por um mínimo quando a partícula de massa m passa por 0.

Isto significa que, nessa posição, o sistema das duas partículas está numa configuração de equilíbrio estável.

O que aconteceu foi mais ou menos o seguinte:

... Era uma vez um sistema de duas partículas em equilíbrio está - vel.

Uma grandona, de massa M.

E outra pequenininha, de massa m...

Em dado instante, forneceu-se energia ao sistema.

Como?

Mas, por exemplo, "chutando" a partícula de massa m.

Antes do chute, o sistema estava isolado.

Durante o chute, o mundo externo interagiu com êle. O resultado líquido da interação foi a passagem de uma certa quantidade de energia, do resto do Universo para o nosso Sistema.

Depois do chute o sistema volta a estar isolado.

Só que agora, com energia maior.

No início, imediatamente depois do chute, a partícula de massa m disparou a partir da sua posição de equilíbrio (o ponto O na Fig. XV-1).

E como estamos estudando a interação no RCM, a outra partícula, a grandona, permanece pràticamente em repouso.

É essa energia cinética inicial da partícula de massa m que representa a quantidade de energia que o resto do Universo (i.e., quem deu o chute...) comunicou ao Sistema.

Arbitrando em zero a energia potencial de interação na configuração de equilíbrio...

... concluímos que a energia total do sistema é exatamente igual a energia comunicado durante o chute.

Repitamos juntos (e desculpe a insistência...):

No início, o sistema está em equilíbrio: energia total nula (no RCM).

Chuta-se a partícula menor, comunicando-lhe uma certa energia cinética E.

A energia total do sistema passa a ser E.

Ou melhor, para não haver dúvida, E_{total}.

Muito bem! Mas o sistema é conservativo (por hipótese).

Em consequência êle está "condenado" a conservar constante essa energia E_{total}.

Até o fim dos tempos... (ou até que alguém venha de novo se meter na conversa!).

O que é que vai acontecer?

Supondo-se que o chute foi dado da direita para a esquerda, a partícula menor se afasta da posição de equilíbrio 0.

A energia potencial de interação aumenta.

E consequentemente a energia cinética diminui.

Por quê?

Porque, do lado esquerdo da posição de equilíbrio, a fôrça de interação é repulsiva.

Basta que você se lembre que a fôrça de interação se mede por "menos o coeficiente angular da tangente ao gráfico do potencial":

$$F = - \frac{dE_p}{dr} ,$$

como vimos no Capítulo XIV. (*)

(*) Com os devidos fatôres de escala, como sempre...

De modo que, à esquerda da posição de equilíbrio, a fôrça que age sôbre a partícula de massa m é dirigida para a direita.

Pelo contrário, do lado direito de 0, a interação é atrativa e a fôrça que agiria sôbre a partícula menor seria dirigida para a esquerda.

A Fig. XV-2 mostra tudo isso.

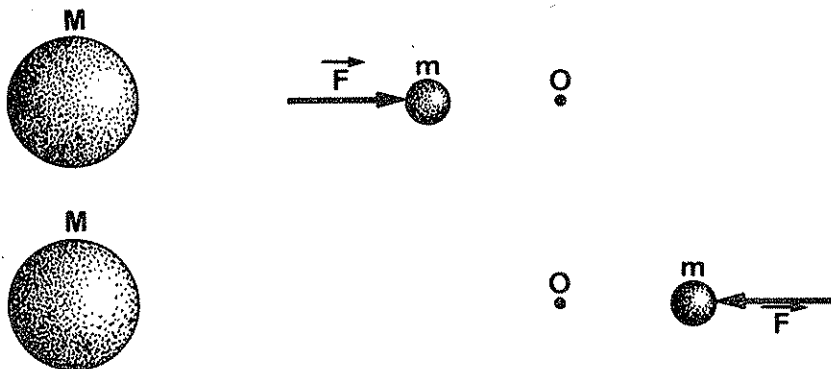



Figura XV-2

Pois bem, voltando à nossa partícula que foi chutada para a esquerda, ela está sendo inicialmente freiada pela fôrça de interação.

De modo que sua energia cinética diminui:

De acôrdo?

O "instantâneo" da Fig. XV-1 apanhou precisamente a partícula na sua viagem inicial. A energia potencial é E_p. Ela está aumentando.

E a energia cinética é E_c. Ela está diminuindo.

Mas, de qualquer maneira, $E_p + E_c = E_{total}$ = constante.

E assim vai a partícula ... a energia cinética diminuindo sempre, e a energia potencial aumentando.

Até que, chegando em A, a energia cinética se anula.

No gráfico, a reta de energia total esbarra contra a curva de potencial.

A partícula pára.

Mas a fôrça de interação continua agindo, clado. <u>Para a direita</u>.

De modo que a partícula dá meia-volta, retorna, e começa outra viagem para a direita.

Ela está sendo agora empurrada pela fôrça de interação.

A energia potencial diminui, e a energia cinética aumenta.

Até que, ao passar pela posição de equilíbrio, a energia total do sistema volta a ser representada pela energia cinética da partícula menor.

Pois nêsse ponto a energia potencial de interação se anula de novo.

Nessa posição a fôrça de interação é nula, não é mesmo? (Repare a tangente à curva do potencial).

Mas, havendo energia cinética, a partícula continua seu caminho, atravessa a posição de equilíbrio indo para a direita, e penetra na região de interação atrativa. Revê a Fig. XV-2 se necessário.

Você já adivinhou a sequência da história!

A partícula é freiada por uma fôrça de sentido contrário ao da velocidade.

A energia potencial aumenta, em detrimento da energia cinética.

Na posição B, a energia cinética é de novo nula. Como o era em A.

B é o outro ponto em que a reta de energia total "esbarra" contra a curva de potencial.

B é o outro ponto de retôrno da partícula, que dá meia volta, e recomeça a andar para a esquerda.

Aumentando a energia cinética até passar por O, às custas da energia potencial...

Ultrapassando a posição de equilíbrio, e diminuindo então a energia cinética... até chegar em A em que dá meia volta.

E assim por diante.

Em resumo: a partícula menor oscila em tôrno da sua posição de equilíbrio estável, entre os pontos de retôrno A e B.

O Físico diz que ela oscila no poço de potencial representado pelo gráfico da Fig. XV-1.

Mas cuidado com essa expressão!

A partícula oscila realmente, em movimento unidimensional, numa região do espaço em que o potencial varia conforme o gráfico.

O gráfico tem forma de poço.

Por extensão, diz-se que na região do espaço em que a partícula oscila, existe um poço do potencial.

Entendido?

De modo que o sistema que acabamos de estudar constitui um oscilador.

O que é necessário para se ter um oscilador?

Mas é muito simples: é preciso dispor de um poço de potencial.

Ora, poço de potencial não cai das nuvens!

É necessário uma interação, e mais do que isso, uma interação em que a energia potencial, ao variar em função da configuração do sistema, passe por um mínimo, forme um poço.

Ou, se você quiser, haverá possibilidade de oscilações tôdas as vêzes que, ao perturbar-se o sistema a partir da sua configuração de equilíbrio estável, houver transformação recíproca de energia potencial em energia cinética.

Um oscilador deve pois possuir dois "reservatórios" de energia: um para a energia potencial; outro para a energia cinética.

Havendo obviamente comunicação entre êsses dois reservatórios!

➧ Exemplo 1 - Voltemos ao galho da árvore balançado pelo vento...

Interagem: a árvore (com a Terra) por um lado, e o galho.

Por intermédio de uma espécie de mola natural, formada pelo próprio galho.

Afastado de sua posição de equilíbrio por uma rajada de vento, a energia cinética inicial vai se transformando em energia potencial, "armazenada" nos campos interatômicos ou moleculares nas células das fibras da madeira.

E essa energia potencial, depois de atingir o seu valor máximo, reverte para energia cinética...

E o galho oscila.

Mas repare na existência dos dois elementos fundamentais do oscilador: havendo massa em movimento, há o reservatório de energia cinética.

E o reservatório de energia potencial está nos campos intermoleculares.

Exemplo 2 - E o caso do carro que oscila ao passar pelos buracos da estrada?

Interagem: a Terra, e o carro.

De duas maneiras: gravitacionalmente, claro; mas também por intermédio das molas do carro.

A soma dos dois potenciais forma um poço, como veremos mais adiante nêste Capítulo.

A queda de uma roda em um buraco da estrada perturba o sistema, comunicando-lhe energia suplementar.

E lá vai êle, oscilando, transferindo energia do reservatório "molas + campo gravitacional" para o reservatório "massa inercial".

Exemplo 3 - Quanto ao balanço em que você brincava, vamos deixar o assunto para logo mais adiante. Porque é um exemplo de pêndulo.

Um caso muito sério em Física!

Mas não custa nada você ir treinando suas células cinzentas...
O importante no pêndulo no fundo, é que há um ponto fixo.
De modo que você descrevia um arco de circunferência em um plano vertical.
E me diga uma coisa: como é que variava a energia potencial gravitacional ao longo dêsse arco?
Como é? Já achou o poço?

Exemplo 4 - Você já se perguntou por que certos materiais são sólidos? A quê é devida a coesão que mantém juntos os íons de um cristal de cloreto de sódio por exemplo?

(Ou, se preferir, de um cristal de sal de cozinha...)

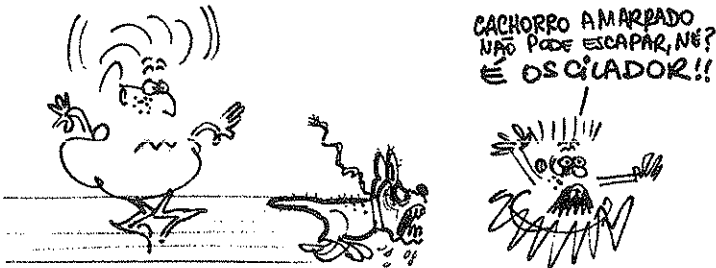
É que os íons cloro, negativos, interagem com os íons sódio, positivos.

E a Natureza procura o arranjo que torna mínima a soma de tôdas as energias potenciais de interação.

De modo que se o cristal é deformado por ações externas (moderadamente, claro!) a energia potencial total aumenta.

E você conclui que, depois de perturbado, o cristal oscila no poço de potencial assim formado.

Muitas propriedades térmicas, elásticas e elétricas do cristal decorrem dêsse comportamento.

Mas teremos oportunidade, no final do Capítulo de voltar ao assunto.

XV-2 - O problema do oscilador.

XV-2-1 Os parâmetros importantes.

São dois: em primeiro lugar a massa da partícula... se fôr o caso da bola de pingue-pongue que brinca com o elefante...

ou das partículas, se elas tiverem massas comparáveis.

E evidentemente, o poço de potencial no qual se processsa a oscilação.

Ou também a lei de fôrça da interação.

Pois conhecendo a lei de fôrça, saberemos achar o pôço de potencial, não é mesmo?

Veja que na escolha dêsses parâmetros, não há nada de misterioso.

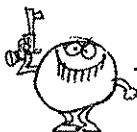
Massa? É porque precisamos conhecer o "reservatório" de energia cinética.

Potencial? É porque precisamos conhecer o "reservatório" de energia potencial.

Viu? Tudo muito lógico...

XV-2-2 O que se pede.

Se você conhece a massa do oscilador e à lei de fôrça, ou o poço de potencial, você deve poder resolver o problema básico: "dada a energia total do oscilador ou, se quiser, a energia que lhe foi comunicada a partir da configuração de equilíbrio, determine o período e a amplitude da oscilação".

Como você deve estar lembrado, êsses têrmos foram definidos no Capítulo VII a propósito do movimento harmônico simplés.

XV-2-3 Divagações em tôrno de período e energia.

Nunca será demais repetir que para que haja oscilação, são necessários dois reservatórios de energia. Um para a energia cinética: é a inércia, ou massa, da partícula. Outro para a energia potencial: é por exemplo a mola da Fig. XV-3, que representa a "conversa" da Terra e de um carrinho, com a mola entre os dois.

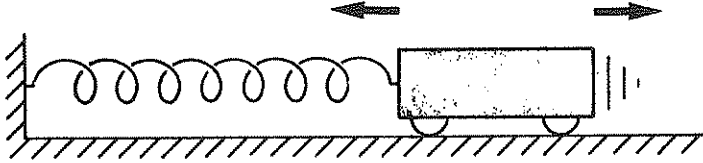



Figura XV-3

Ou é o campo gravitacional terrestre no caso do pêndulo da Fig.XV -4.

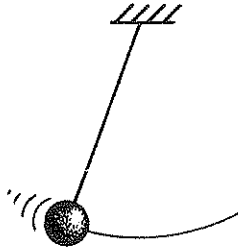



Figura XV-4

De modo que estamos entendidos: dois reservatórios de energia.

Mas não é só isso: os dois reservatórios devem ter mesma capacidade, se quisermos que o sistema oscile sòzinho, sem ninguém estranho se meter na conversa.

Não sei se você me entendeu bem. Vou tentar explicar melhor.

Olhe a situação do carrinho da figura XV-3. Quando êle passa pela posição de equilíbrio, a situação é a seguinte:

E_c é máxima

E_p é nula

De acôrdo?

Quando êle atinge uma das posições de elongação máxima (ou seja, quando atinge um dos pontos de retôrno) a situação se inverte:

E_c é nula

E_p é máxima

E pela conservação da energia:

$$E_c \text{ máxima} = E_p \text{ máxima}$$

Isto significa que, deixando-se o sistema oscilar sòzinho, êle vai ajustar sua cinemática, isto é, o seu período, de modo que:

- a velocidade máxima (ao passar pela posição de equilíbrio)...
- decrescendo do fato da aceleração...
- a qual depende por sua vez da lei de fôrça da mola...
- leve o carrinho a uma posição extrema...
- ou seja a um estado de deformação máxima da mola...
- tal que a energia potencial armazenada seja exatamente igual à energia cinética inicial.

Não adianta, por exemplo, dar 10J de energia cinética a um oscilador, e exigir que o seu período seja, digamos, 1 segundo. O período será o que deve ser para que haja tempo, e possibilidade, de despejar êsses 10J na mola.

O período se adapta às circunstâncias, para que o oscilador... "possa viver bem".

Pelo que precede, você terá provàvelmente chegado à conclusão que o período de um oscilador depende de sua energia total.

É verdade, em geral.

Há porém, uma exceção, mas ela é sumamente importante.

É o caso do oscilador harmônico.

Veremos que no oscilador harmônico, o período independe da amplitude da oscilação, e consequentemente da energia.

XV-3 - O oscilador harmônico: a cinemática do oscilador.

XV-3-1 Definição: o poço parabólico.

Um oscilador é dito harmônico simples se a energia potencial de interação tiver a forma

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 \qquad \text{(XV-1)}$$

em que x representa a posição (escalar) da partícula, e k é uma constante positiva.

Estamos em um referencial inercial.
E a partícula em questão é a bola de pingue-pongue que interage com o elefante.
Ou o carrinho que interage com a Terra. Como na Fig. XV-3.

A posição de equilíbrio ($E_p = 0$) é evidentemente $x = 0$.

O poço de potencial é parabólico:

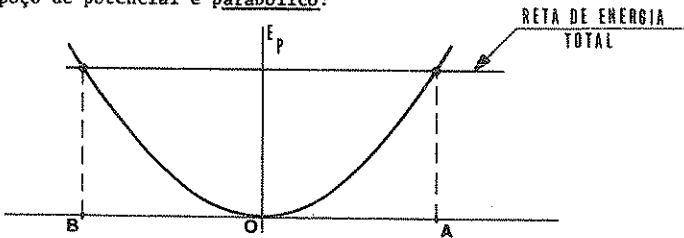



Figura XV-5

Devido à simetria da parábola, uma partícula que tiver energia total E, oscilará entre os pontos A e B simétricos em relação à posição de equilíbrio O.

A distância OA = OB é a amplitude A das oscilações.

XV-3-2 Lei de fôrça.

Aprendemos no Capítulo XIV que a fôrça que age sôbre a partícula que oscila é medida (indiretamente) por "menos o coeficiente angular da tangente à curva F vs x".

Isto é, da tangente ao poço de potencial.

$$F = -\frac{dE_p}{dx} \qquad \text{(XV-2)}$$

A Fig. XV-6 mostra a construção no caso do oscilador harmônico. Você está lembrado que no mesmo Capítulo XIV, aprendemos também que no caso do poço parabólico, a lei de fôrça é:

$$F = -kx \qquad \text{(XV-3)}$$

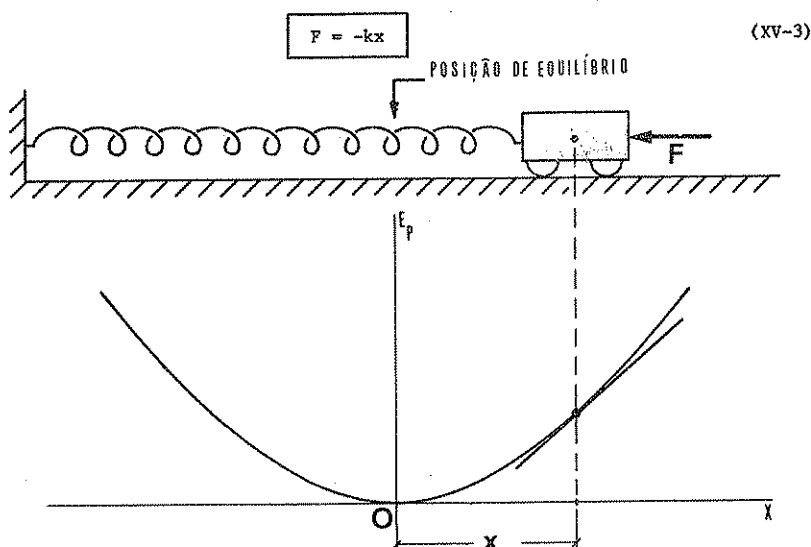



Figura XV-6

A Lei de fôrça do oscilador harmônico é linear!

Por esta razão, chamamos também o oscilador harmônico de oscilador linear.

Aguente mais um pouquinho essas considerações puramente teóricas. Daqui a pouco, trataremos de exemplos e de aplicações.

XV-3-3 A cinemática do oscilador harmônico.

Se a fôrça é $F = -kx$, a aceleração é...

Certo! a aceleração é

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad \text{(XV-4)}$$

Não é mesmo?

Mas então, se a aceleração é proporcional à elongação e de sinal contrário, a cinemática do oscilador harmônico simples é.........é a Cinemática do movimento harmônico simples!

Tudo certo? Vamos lá!

A elongação do oscilador é:

$$x = A \cos \omega t \qquad \text{(XV-5)}$$

A velocidade é:

$$v = -\omega A \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(XV-6)}$$

A aceleração é

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t$$
$$a = -\omega^2 x \qquad \text{(XV-7)}$$

Mas espere um minuto...

Pela Dinâmica, a aceleração é

$$a = -\frac{k}{m}x$$

E pela Cinemática, ela é

$$a = -\omega^2 x$$

Ah! mas então

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{(XV-8)}$$

↓

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(XV-9)}$$

↓

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{(XV-10)}$$

$\underline{\omega}$ é muitas vêzes chamado <u>frequência angular</u>.
A frequência pròpriamente dita é $f = \frac{1}{T} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{M}}$.
Temos então

$$f = 2\pi\omega \qquad \text{(XV-11)}$$

Já temos uma das respostas ao problema fundamental do oscilador:

O período é proporcional a $\sqrt{M}$

e inversamente proporcional a $\sqrt{k}$

E então, o período do oscilador harmônico é independente da amplitude (ou da energia).

E falando em amplitude, é precisamente isto que falta determinar: qual é a amplitude do oscilador {m, k}? (*)

Bem você está lembrado que a velocidade máxima é ωA, de modo que

$$v^2_{máx} = \omega^2 A^2$$

Mas, sendo E a energia total:

$$E = \frac{1}{2} m v^2_{máx} \rightarrow v^2_{máx} = \frac{2E}{m}$$

De modo que

$$\omega^2 A^2 = \frac{2E}{m}$$

E como $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, vem

$$\frac{k}{M} A^2 = \frac{2E}{m}$$

Ou seja

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} kA^2 \\ A &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \end{aligned}} \qquad \text{(XV-12)}$$

A energia de um oscilador harmônico é proporcional ao quadrado da amplitude.

Já temos assim o período e a amplitude do oscilador harmônico em função dos parâmetros m e k característicos do oscilador, e da energia total E.

Mas é muito mais instrutivo descobrir de novo tudo isto diretamen -

(*) Você entende essa notação? Um oscilador é determinado completamente pela sua inercia e pela lei de fôrça, isto é, no caso do oscilador harmônico, por m e k.

te... a partir da Física.

XV-4 - Onde está a Física em tudo isto?

XV-4-1 Para viver bem...

A energia cinética é máxima quando o oscilador passa pela posição de equilíbrio:

$$(E_c)_{máx} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

em que ωA representa a velocidade máxima, como você sabe.

A energia potencial é máxima quando o oscilador atinge um dos pontos de retôrno, e então

$$(E_p)_{máx} = \frac{1}{2} kA^2$$

Para viver bem... o oscilador deve transformar $(E_c)_{máx}$ em $(E_p)_{máx}$ e reciprocamente, de modo que

$$\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}} \qquad \text{(XV-13)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \text{(XV-14)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}} \qquad \text{(XV-15)}$$

A frequência do oscilador harmônico vem "empacotada" junto com êle.

Conforme a quantidade de energia que emprestamos ao sistema para que êle possa oscilar, podemos fazer variar a amplitude das oscilações. Nunca porém a frequência ou, se quiser, o período.

E falando em amplitude...

XV-4-2 Conservando de novo a energia...

A energia cinética máxima é igual à energia total E "emprestada" ao oscilador.

Mas a energia total é também igual à energia potencial máxima

$$\frac{1}{2}\,kA^2$$

Então

$$E = \frac{1}{2}\,kA^2 \qquad A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \qquad \text{(XV-16)}$$

E agora, vamos aos osciladores reais!

XV-5 - Um modêlo mecânico: partícula na extremidade de uma mola.

XV-5-1 Não é qualquer mola que serve!

Se quisermos uma lei de fôrça linear, da forma $F = -kx$, temos que escolher cuidadosamente a mola.

As molas helicoidais feitas com fios de aço bem temperado são quase que perfeitamente lineares, se as deformações impostas não forem muito grandes.

Os coeficientes das molas usualmente utilizadas no Laboratório variam na faixa de 10 até 100 N/m.

Não é pois qualquer mola que serve...

XV-5-2 Uma primeira maneira de "eliminar" o pêso.

Amarremos um carrinho na extremidade de uma "bôa" mola.

A outra extremidade da mola está prêsa a um suporte fixo no Laboratório.

De modo que o carrinho está...........conversando

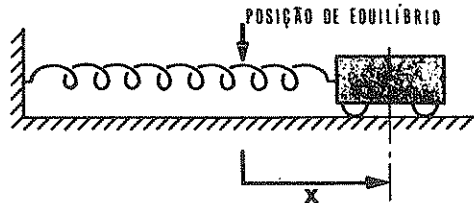



Figura XV-7

com a Terra.

Primeiro por intermédio da mola.

E segundo, gravitacionalmente... infelizmente!

Digo infelizmente, porque gostaria que a interação se processe <u>sò-mente</u> por intermédio da mola, para que a <u>única</u> fôrça seja a nossa conhecida $F = -kx$.

Em outros têrmos, para estar certo de ter um oscilador harmônico.

Mas como estamos experimentando no planêta Terra, há sempre o pêso......a interação gravitacional.

Se eu coloco o carrinho sôbre uma mesa horizontal, como na Fig XV-7 o pêso e a reação da mesa se equilibram sempre.......desde que não haja atrito, evidentemente.

O melhor ainda é utilizar a calha de ar.

E nessas condições, a fôrça resultante que age sôbre o carrinho quando êle está afastado de <u>x</u> da posição de equilíbrio (mola relaxada) é

$$F = -kx.$$

Temos um oscilador harmônico.

Sendo k o coeficiente da mola e m a massa do carrinho, a frequência (angular) é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Exemplo - A massa do carrinho é 2,0kg.

O coeficiente da mola é 40 N/m. Qual é a frequência angular? Qual é o período das oscilações?

Solução: A frequência angular é

$$\omega = \sqrt{\frac{40}{2}} = 4,5/s$$

O período é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{40}} = 1,4s$$

XV-5-2 E uma outra maneira.

Suspenda uma mola, verticalmente, a um suporte fixo (Fig. XV-8).

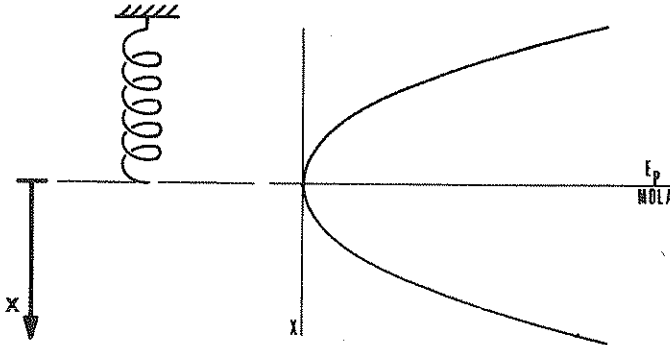



Figura XV-8

A energia potencial capaz de ser armazenada na mola é $E_p = \frac{1}{2} kx^2$.

(Observe que eu girei de $\frac{\pi}{2}$ o poço parabólico tal que é usualmente representado,na figura acima).

Agora, suspenda à mola uma bola de massa m (Fig. XV-9).

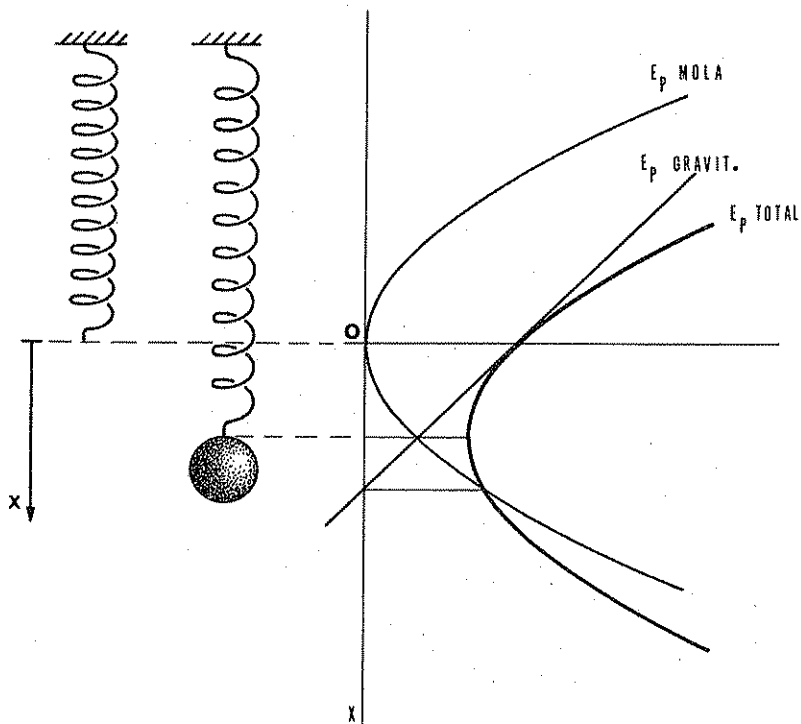



Figura XV-9

A bola e a Terra interagem de duas maneiras:

a) interação por meio da mola: o potencial correspondente é

$$(E_p)_{mola} = \frac{1}{2}kx^2$$

b) interação gravitacional: o potencial correspondente é

$$(E_p)_{grav} = E_o - mgx,$$

em que E_o é uma constante aditiva arbitrária. Lembre-se que a Natureza nunca fornece o valor de uma energia potencial... sòmente fornece ΔE_p!

1º) Você entende o sinal "menos" na expressão de $(E_p)_{grav} = E_o - mgx$?

2º) Se a Natureza nunca fornece o valor de uma energia potencial, porque é que eu fui escrever que $(E_p)_{mola} = \frac{1}{2}kx^2$, sem constante arbitrária?

Muito bem! Temos agora a superposição de duas interações. Basta superpor os potenciais:

$$\boxed{(E_p)_{total} = \frac{1}{2}kx^2 - mgx + E_o} \qquad \text{(XV-17)}$$

E você observa que:

- $(E_p)_{total}$ é um poço parabólico. (Volte à Fig. XV-9 para ver como a "soma" da parábola $(E_p)_{mola}$ e da reta $(E_p)_{grav}$ dá a parábola $(E_p)_{total}$

E se o poço "resultante" é parabólico, temos um oscilador harmônico.

- O poço resultante tem a mesma forma que o inicial (o da mola). É a mesma parábola (*), que sofreu uma translação de........

.... de quanto?

Veja o trinômio do 2º grau no segundo membro da equação (XV-17). O seu mínimo tem como coordenadas:

$$x = \frac{mg}{k}$$

$$E_p = \frac{m^2 g^2}{2k} - E_o$$

O que aconteceu é que o fundo do poço (i.e., o vértice da parábola), baixou de $\frac{mg}{k}$.

E a bola oscila em tôrno dessa nova posição, em vez de oscilar em tôrno da posição que ocupa a extremidade livre da mola quando ela está relaxada.

Nada de muito extraordinário nisto. Veja: ao suspender a bola sem deixá-la oscilar, ou seja, quando a bola está sustentada estàticamente pela mola, essa mola está alongada de quanto?

O cálculo que você acaba de fazer deve ter sido mais ou menos o seguinte:

Sôbre a bola em equilíbrio estático atuam duas fôrças: o pêso $m\vec{g}$ e a fôrça $\vec{F}$ exercida pela mola. (Fig. XV-10).

$$|\vec{F}| = |m\vec{g}|$$

Mas por seu lado, se a mola exerce a fôrça $\vec{F}$ sôbre a bola, a bola exerce a fôrça $-\vec{F}$ sôbre a mola...

Figura XV-10

(*) O problema XV-12 lhe mostrará que a parábola é a mesma.

... e a fôrça $|\vec{F}| = |m\vec{g}|$ que age sôbre a mola de coeficiente k alonga essa mola de $|x_o|$ tal que

$$|\vec{F}| = k|x_o| \rightarrow |x_o| = \frac{|\vec{F}|}{k} = \frac{|m\vec{g}|}{k} .$$

Ah! então, quando a bola está suspensa em equilíbrio, a mola está alongada de $\frac{mg}{k}$. Agora, se você deslocar a bola para baixo ou para cima, a partir da posição de equilíbrio, o pêso da bola já está equilibrado em decorrência do alongamento inicial x_o (a partir da posição da mola relaxada), e <u>você pode tratar o seu oscilador como o do caso anterior</u> (carrinho sôbre a mesa horizontal).

A única diferença é que a posição de equilíbrio não é mais a que corresponde à mola relaxada.

É a que corresponde à mola alongada de $x_o = \frac{mg}{k}$.

Você entende agora que, no fundo, não há diferença essencial entre êste caso e o precedente.

Em vez de "neutralizar" a atração gravitacional pela relação de uma mesa horizontal, neutraliza-se por um alongamento "permanente" da mola.

Exemplo - A bola da Fig. XV-11 é abandonada a partir da posição em que o comprimento ℓ_o da mola é o seu comprimento normal (i.e., mola relaxada). Qual é a amplitude das oscilações?

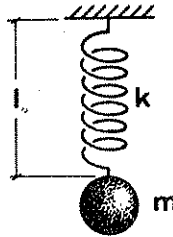



Figura XV-11

Solução: A posição mostrada na figura acima é um dos pontos de retôrno do oscilador (velocidade nula). A posição de equilíbrio estático é o centro das oscilações e se encontra $\frac{mg}{k}$ abaixo.

Você conclui que a amplitude é precisamente $\frac{mg}{k}$.

XV-6 - Um exemplo importante: o pêndulo.

XV-6-1 - O problema geral do pêndulo simples.

Suspenda uma pedra a um barbante e faça oscilar o sistema.

O pêndulo assim formado (Fig. XV-12) oscila em um plano vertical, no referencial inercial terrestre.

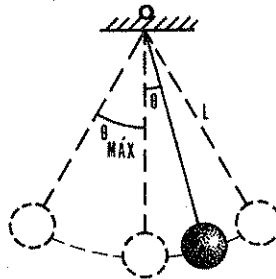



Figura XV-12

O ponto fixo O é o ponto de suspensão.

O comprimento do barbante é ℓ.

Se as dimensões lineares da pedra forem pequenas em comparação com o comprimento ℓ, o pêndulo é chamado simples.

> Quando você amarra a pedra ao barbante, você tem um sistema físico.
> Qual é a unidade natural de comprimento do sistema?
> Qual é a unidade natural de massa?
> Qual é a unidade natural de tempo?

Qualquer corpo que oscila em tôrno de um eixo fixo é um pêndulo.

Quando o vento "balança" os letreiros das lojas suspensos na rua, são pêndulos que estão oscilando.

O letreiro que oscila é também um pêndulo. É um pêndulo chamado composto.

Sòmente é pêndulo simples o pêndulo formado por um objeto suspenso a uma corda cujo comprimento é muito grande em comparação com as dimensões do objeto, e cuja massa é desprezível em comparação com a massa do objeto.

A figura XV-12 mostra a elongação angular máxima $\theta_{máx}$, de um lado e do outro da posição de equilíbrio.

Em um instante qualquer t essa elongação angular é θ.

Problema: O pêndulo simples é um oscilador harmônico? Veja, o caminho que leva à resposta já está traçado: determine o poço de potencial. Se fôr parabólico, o oscilador é harmônico. Se não fôr parabólico, não é harmônico.

Simples! Não é?
Então vamos lá!

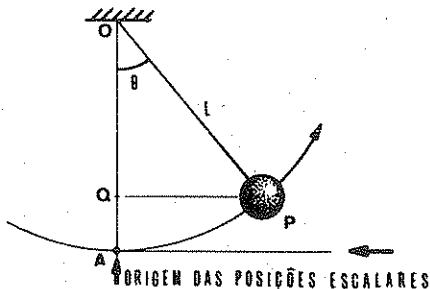



Figura XV-13

Interagem: a massa do pêndulo e a Terra.

Tomemos o plano horizontal que passa pela posição de equilíbrio como origem da energia potencial de interação gravitacional.

Quando a massa do pêndulo passa pela sua posição de equilíbrio, $E_p \equiv 0$, por convenção.

Muito bem. Qual é a energia potencial de interação gravitacional quando a elongação angular é θ?

Projete a partícula P em Q, sôbre a vertical da posição de equilíbrio. Entre as passagens por A e por P, a energia potencial aumentou de:

$$\Delta E_p = mg(AQ)$$

em que m é a massa do pêndulo.

Mas $AQ = OA - OQ = \ell - \ell \cos\theta = \ell(1 - \cos\theta)$.

De modo que

$$\Delta E_p = mg\ell(1 - \cos\theta). \qquad \text{(XV-18)}$$

Gostaria no entanto de ter essa energia em função da elongação escalar x. Essa elongação escalar é simplesmente o arco de circunferência $\widehat{AP}$, orientado positivamente (como o ângulo θ) no sentido trigonométrico.

Nada mais fácil! $\widehat{AP} = x = \theta\ell$

De modo que $\theta = \dfrac{x}{\ell}$

Substituindo em (XV-18):

$$\Delta E_p = mg\ell\left(1 - \cos\frac{x}{\ell}\right)$$

Essa expressão representa a variação da energia potencial de interação entre as posições A e P.

Mas desde que E_p em A é nula por convenção, temos:

$$\boxed{E_p(x) = mg\ell\left(1 - \cos\frac{x}{\ell}\right)} \qquad \text{(XV-19)}$$

Pois é! O poço de potencial do pêndulo simples não é parabólico. Êle tem a forma representada na Fig. XV-14, em que a elongação angular varia de $-\frac{\pi}{2}$ até $+\frac{\pi}{2}$, e a elongação escalar, entre $-\frac{\pi}{2}\ell$ e $+\frac{\pi}{2}\ell$.

E consequentemente, o pêndulo simples <u>não é</u> um oscilador harmônico.

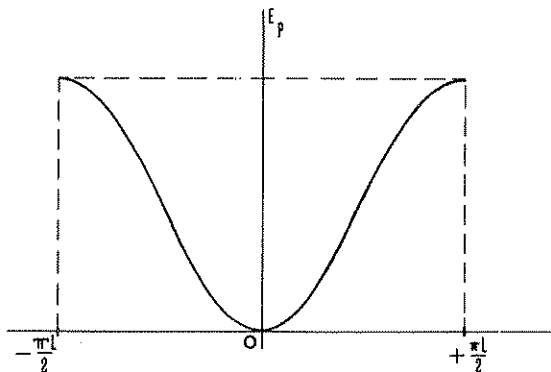



Figura XV-14

E no entanto...

E no entanto, se você olhar para o <u>fundo</u> do poço, você há de convir que nessa região o poço <u>parece</u> com um poço parabólico.

Será que se a amplitude de oscilação fôr <u>pequena</u> (para ficar sòmente com o fundo do poço), não haverá jeito de tornar êsse poço aproximadamente parabólico?

Experiência: Volte a grudar uma bola de chiclete na borda de um disco LP e põe o disco a girar na vitrola. (*)
Peça então a um colega (ou ao Martins) de fazer oscilar um pêndulo de uns 80 cm de comprimento, justo acima do prato, segurando o barbante na vertical do eixo do disco.
Você fica observando de um, dois ou três metros de distância, com o ôlho no plano do disco.
Com pequenos ajustes no comprimento do pêndulo, você e o seu colega conseguirão que o movimento da bola do pêndulo acompanhe fielmente o movimento da bola de chiclete observado por você.
E qual é mesmo para você, o movimento da bola de chiclete?

XV-6-2 <u>O caso particular das "pequenas oscilações"</u>.

Suponha então que $\underline{x}$ é muito pequeno.

Muito pequeno em comparação com quê?

Mas, evidentemente, com a única unidade de comprimento disponível, isto é, com o comprimento ℓ do pêndulo.

Ah! então devemos medir x com ℓ; em outros têrmos, precisamente fazer aparecer a razão $\frac{x}{\ell}$ ... Mas já temos essa razão: Na expressão (XV-19) da energia potencial, temos cos $\frac{x}{\ell}$.

Muito bem! Escrevamos:

$$\cos \frac{x}{\ell} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{\ell}} = (1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{\ell})^{1/2}$$

Mas você sabe que, se $x << \ell$ ou seja, se $\frac{x}{\ell} << 1$, podemos substituir sen $\frac{x}{\ell}$ por $\frac{x}{\ell}$, de modo que

$$\cos \frac{x}{\ell} \simeq (1 - \frac{x^2}{\ell^2})^{1/2}$$

Desenvolva essa potência pela fórmula do binômio:

(*) Veja a Seção VII-4 do Volume I.

$$\cos\frac{x}{\ell} \simeq 1 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\ell^2} + \text{têrmos de ordem } \left(\frac{x^2}{\ell^2}\right)^2$$

Ora, sendo $\frac{x}{\ell} \ll 1$, os têrmos de ordem $\left(\frac{x^2}{\ell^2}\right)^2$ são desprezíveis em comparação com o têrmo $\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\ell^2}$. De modo que

$$\boxed{\cos\frac{x}{\ell} \simeq 1 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\ell^2} \qquad \left(\frac{x}{\ell} \ll 1\right)} \qquad \text{(XV-20)}$$

1) Se você já estudou o binômio de Newton, o que precede não deve ser muito difícil, com uma ajuda do seu Professor se fôr necessário.

2) Se você nunca viu o binômio de Newton, o que precede deve ser grego... ou sanscrito!.

Mas não há de ser nada. Pois isso serve _sòmente_ para mostrar a equivalência de _cos α_ e de $(1 - \frac{1}{2}\,\alpha^2)$ para $\alpha \ll 1$ radiano. Não será utilizado além disto.

Ora, suponha que $\alpha = \frac{1}{10}$ rad.

Eu calculo $\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\right] = 0{,}995$

E uma tábua de valores trigonométricos me fornece:

$$\cos\left(\frac{1}{10}\text{ rad}\right) = \cos 5^\circ 42' = 0{,}995$$

de acôrdo?

Substituamos na expressão (XV-19):

$$E_p(x) = mg\ell\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\ell^2}\right)$$

ou seja:

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}\frac{mg}{\ell}x^2 \qquad (x \ll \ell)} \qquad \text{(XV-21)}$$

E você vê que, efetivamente, o poço de potencial do pêndulo simples se torna parabólico para pequenas oscilações.

Para pequenas oscilações, o pêndulo simples é um oscilador harmônico. (*)

Qual é o período do pêndulo, para pequenas oscilações?

Veja, se você compara o poço $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ com o poço $E_p = \frac{1}{2}\frac{mg}{\ell}x^2$, você observa que o "k equivalente" para o pêndulo é $\frac{mg}{\ell}$. Em consequência, para obter o período do pêndulo, basta substituir k por $\frac{mg}{\ell}$ na expressão geral do período do oscilador harmônico (XV-10):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/\ell}}$$

ou seja:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \qquad \text{(XV-22)}$$

Você conclui que o período do pêndulo simples independe da massa.

Não é interessante?

É porém muito mais interessante que você entenda a razão física disto.

(*) O Problema XV-36 lhe mostrará que a restrição "pequenas oscilações" não é tão drástica assim.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{MASSA INERCIAL}}{K}}$$

NA REALIDADE DEVERIAMOS ESCREVER...

ÔBA!

NÃO INTERROMPA! MAS O K DO PÊNDULO É: $\frac{(\text{MASSA GRAVITACIONAL}) \times g}{\ell}$

???

DE MODO QUE PARA O PÊNDULO:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{MASSA INERCIAL}}{\text{MASSA GRAVITACIONAL}} \times \frac{\ell}{g}}$$

De modo que, tôdas as vêzes que você verifica que o período de um pêndulo é independente de sua massa (para pequenas oscilações), você verifica a equivalência entre massa inercial e massa gravitacional!

XV-7 - Nem todos os osciladores são harmônicos.

No Capítulo IX, seção IX-7-3 (*), você aprendeu que a fôrça de interação entre dois átomos (ou dois íons) da rêde cristalina de um sólido varia com a distância r conforme o gráfico da Fig. XV-15.

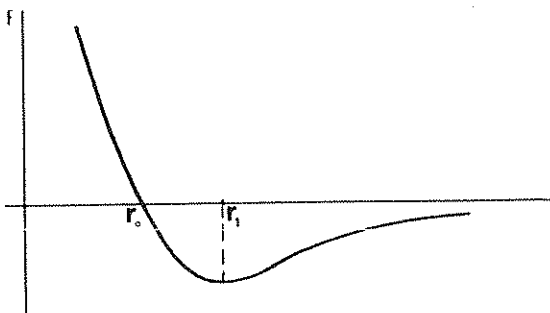



Figura XV-15

Você se convencerá fàcilmente que o poço de potencial correspondente deve ser parecido com o da Fig. XV-16. Lembre-se que a fôrça obtem-se a partir do poço traçando tangentes e medindo coeficiente angulares.

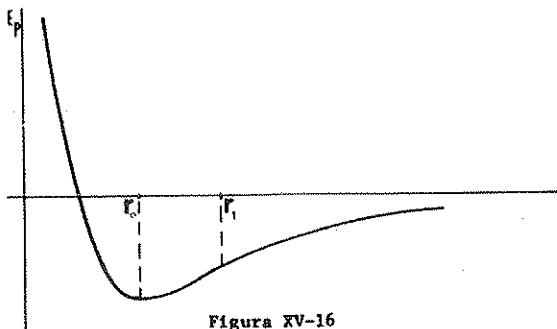



Figura XV-16

(*) Física com Martins e eu, Vol. II, Fascículo 1.

Pois bem, se a energia dos osciladores fôr muito pequena (isto é, se a temperatura do sólido fôr muito baixa), a distância r entre dois átomos vizinhos "oscila" no fundo do poço: na vizinhança do mínimo. Os átomos são, nessas condições, osciladores pràticamente harmônicos.

Por quê?

Mas porque, na vizinhança do mínimo, qualquer poço pode se "parabolizar", como aconteceu com o poço do pêndulo simples.

Só que, em geral, a matemática é um pouco (apenas!) mais difícil que no caso do pêndulo, de modo que a demonstração fica para mais tarde.

Bem, então para energias baixas, como E_1 na Fig. XV-17, a distância interatômica r oscila harmônicamente em tôrno da distância r_o de equilíbrio.

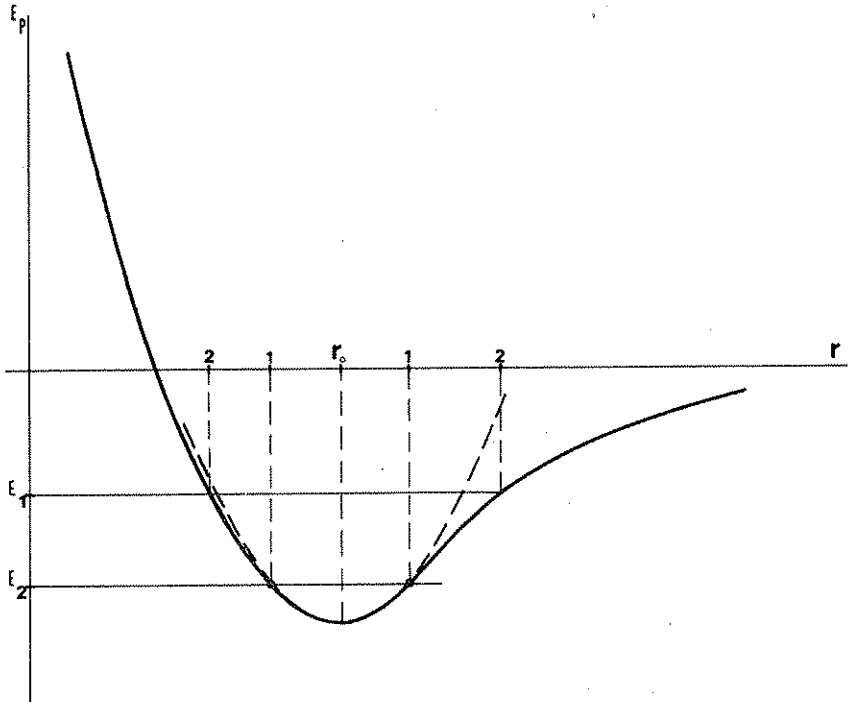



Figura XV-17

(É a natureza que impõe $\underline{r_o}$ para cada espécie de sólido, não esque - ça!).

Os pontos de retôrno (1-1) são simétricos em relação a $\underline{r_o}$. E nessas condições a distância interatômica <u>média</u> é $\underline{r_o}$.

Essa distância média é òbviamente a única que nossas medidas "ma - croscópicas" podem nos fornecer.

Você faz uma medida macroscópica indireta da distância média interatômica tôdas as vêzes que você mede o comprimento de um objeto com uma régua graduada.

Mas suponha que você aquece o sólido.

A energia disponível para os osciladores atômicos aumenta com a temperatura.

Ela chega por exemplo ao valor E_2 da Fig. XV-17.

Está claro que para a energia E_2, o poço de potencial não pode mais ser considerado como parabólico!

Os pontos de retôrno (2-2) não são mais simétricos em relação a $\underline{r_o}$. A distância interatômica passa mais tempo com valores maiores que $\underline{r_o}$ de que com valores menores que $\underline{r_o}$! De modo que o valor médio dessa distância, valor êste que fornecerão nossas medidas macroscópicas, <u>é maior que r_o</u>.

Assim se entende a dilatação térmica dos sólidos.

É bem verdade que, à medida que a temperatura aumenta, a <u>amplitude</u> das vibrações da rêde cristalina aumenta. A Fig. XV-17 mostra claramente êsse fato.

Mas se o poço fôsse simétrico (não necessàriamente parabólico, aliás), o valor médio continuaria sendo $\underline{r_o}$, qualquer que seja a amplitude das oscilações da rêde.

Há dilatação térmica, não ùnicamente porque a amplitude das vibra - ções aumenta, mas porque a amplitude aumenta em um poço <u>que deixa de ser harmônico, tornando-se assimétrico</u>.

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas estrelados (*) devem ser discutidos em aula, com o seu profes - sor).

*XV-1 - Volte à Fig. XV-1, que representa o poço de potencial da interação entre duas partículas. Eu lhe disse no texto que a energia potencial era E_p, ordenada do ponto da curva correspondente à posição representada.

Imagine que você esteja no Laboratório, estudando uma interação daquêle tipo. Como é que você faria para medir E_p, e consequentemente para construir ponto por ponto o poço de potencial?

Não tenha mêdo de dar sugestão, desde que sejam razoáveis (i.e., de bom-senso)!

XV-2 - Sòmente para não enferrujar, vamos repetir um problema já feito muitas vêzes.

Mas é muito importante.

Sempre no caso da Fig. XV-1, suponha que a massa M seja 1,0kg, e a massa m, $1{,}0 \times 10^{-3}$kg. Observa-se que a partícula menor passa com uma velocidade de 10m/s, (medida no RCM) pela sua posição de equilíbrio.

Qual é, nêste instante, a velocidade da partícula maior? Qual é sua energia cinética? Qual é a razão entre as energias cinéticas das duas partículas?

E a propósito, qual é a razão entre os momenta (ecalares)?

XV-3 - Numa mesa de sinuca, você lança a bola perpendicularmente a uma das tabelas. Ela repica, volta, bate na tabela oposta, repica, etc... Se não houvesse perda de energia mecânica, ela oscilaria indefinidamente o que é absurdo, claro... Mas supondo-se que a energia mecânica se conserve, você tem aí um oscilador. Faça um esboço do pôço de potencial dêsse ocilador.

(Êsse modêlo corresponde ao que se chama em Física: " a partícula na caixa").

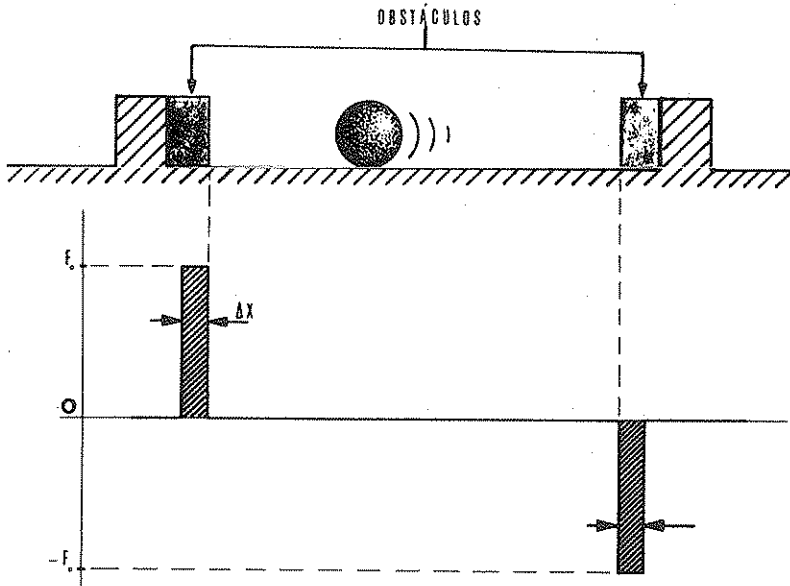
XV-4 - Considere um pêndulo de massa m e comprimento ℓ (a pedra amarrada a um barbante). Faça-o oscilar com uma amplitude de $\pi/2$ de cada lado da posição de equilíbrio. Expresse analìticamente o potencial:

a) em função do ângulo θ (tomando como origem a vertical da posição de equilíbrio).

b) em função do arco s medido a partir da posição de equilíbrio.

Construa os poços de potencial correspondentes.

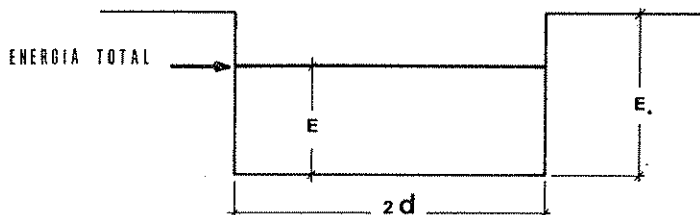
*XV-5 - Uma partícula oscila entre dois obstáculos elásticos (pode imaginar, se quiser, a bola de sinuca do problema XV-4, oscilando entre as duas tabelas).

A fôrça de interação com os obstáculos varia com a posição conforme o gráfico abaixo:

a) Qual é o poço de potencial correspondente?

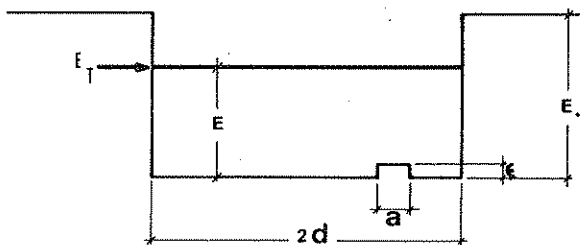
b) Suponha agora que os obstáculos "endureçam": as zonas de interação Δx vão ficar cada vêz mais estreitas, mas a regra do jôgo é que as áreas sombreadas conservem sempre o mesmo valor.

Como vai se modificar o gráfico F vs x?

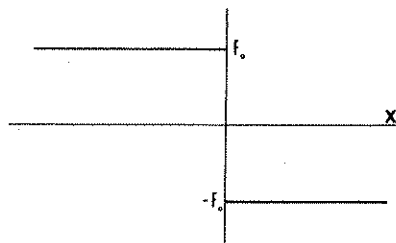
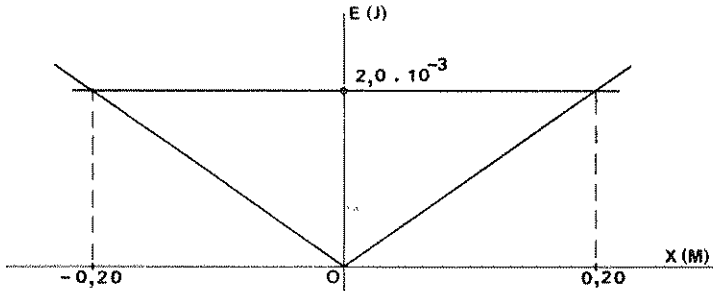
O que acontece ao poço de potencial?

XV-6 - Uma partícula de massa m oscila no poço de potencial representado abaixo:

a) Qual é a amplitude do movimento?

b) Qual é o período?

*XV-7 - Volte ao problema precedente. Suponha que o fundo do poço apresenta uma pequena irregularidade retangular de largura a e altura $\epsilon \ll E$.

a) Como é modificado o período do oscilador?

b) Pode imaginar uma situação física que ilustre essa "perturbação"?

XV-8 - A lei de fôrça de um oscilador é dada pelo gráfico ao lado. Qual é o poço de potencial, correspondente?

XV-9 - Uma partícula de massa $\underline{m}$ = 0,10kg oscila no poço de potencial representado abaixo:

Qual é o período das oscilações?

*XV-10 - Na seção XV-3, eu disse que um oscilador é harmônico simples se o poço de potencial fôr $E_p = \frac{1}{2} kx^2$.

Mostre que a energia $E_p = ax^2 + bx + c$ define também um oscilador harmônico, desde que $\underline{a}$ seja positivo.

*XV-11 - A expressão do período do oscilador harmônico é $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. Convença-se, por argumentos puramente físicos (sem cálculos!), que era de esperar-se que o período aumente com a massa e diminua quando o coeficiente da mola aumenta.

XV-12 - Referindo-se à seção XV-5-2, mostre que a parábola $\frac{1}{2} kx^2 - mgx + E_o$ é idêntica à parábola $\frac{1}{2} kx^2$. (Sugestão: substitua x por $x - \frac{mg}{k}$).

*XV-13 - Sempre com referência à seção XV-5-2, mostre que o valor da constante arbitrário F_o, no poço (XV-17), é irrelevante.

*XV-14 - Considere o oscilador da Fig. XV-9. Quando a bola passa pela posição de equilíbrio estático a energia cinética é máxima, de acôrdo? Quando a bola atinge o ponto de retôrno superior, a energia cinética é nula. Aonde foi essa energia cinética?

Um conselho: pense um pouco antes de responder...

XV-15 - Um oscilador harmônico leva 0,50s para ir de um dos pontos de retôrno até a posição de equilíbrio. Determine o período, a frequência e a frequência angular.

XV-16 - Refere-se à Fig. XV-7. Uma fôrça de 10N é necessária para deformar a mola de 10 cm, e a massa do carrinho é 1,0 kg.

Você desloca o carrinho de $5,0 \times 10^{-2}$m a partir de sua posição de equilíbrio, e o abandona com velocidade inicial nula.

Determine: amplitude, frequência, período.

XV-17 - Refira-se ao problema precedente, em que você comunicou energia ao sistema por meio de compressão da mola.

Suponha agora que você comunica essa energia impartindo ao carrinho uma velocidade de 2,0 m/s a partir da posição de equilíbrio.

Determine: amplitude, frequência, período.

XV-18 - Considere agora o oscilador da Fig. XV-9. A bola tem massa m =0,20kg, e quando você a suspende à mola relaxada, esta se alonga de 2,0 x $\times 10^{-2}$m.

A partir dessa posição de equilíbrio, você puxa a bola para baixo de $1,0 \times 10^{-2}$m, e larga. ($g = 10$ m/s^2).

Determine: amplitude, período, frequência.

*XV-19 - Voltemos a um oscilador do tipo da Fig. XV-7. A frequência angular do oscilador é 10 rad/s. Você comunica uma energia de 2,5J ao sistema deslocando o carrinho de 10 cm a partir de sua posição de equilíbrio e comunicando-lhe, a partir dessa nova posição, uma velocidade inicial de 2,0m/s.

Determine: amplitude, período, frequência.

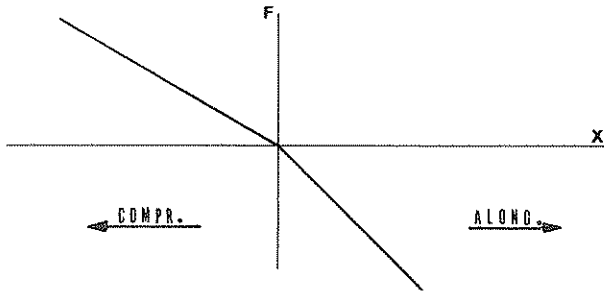
*XV-20 - Se você suspende uma massa m a uma mola vertical, a mola se alonga de ℓ. Você corta a mola em dois pedaços idênticos, e suspende a mesma massa m a uma das metades. Qual é o período dêste oscilador?

XV-21 - Numa molécula de água cada hidrogênio pode oscilar na direção do átomo de oxigênio. Quando o hidrogênio se afasta de $1,0 \times 10^{-12}$m, a fôrça de restauração (i.e., a que "chama de volta" o átomo) é $5,0 \times 10^{-10}$N.

Qual é a frequência das oscilações dos átomos de hidrogênio?

XV-22 - Você suspende uma massa M a uma mola vertical. O alongamento estático da mola é $\underline{\ell}$.

Se você acrescentar à massa M uma sôbrecarga $\underline{m}$, qual é o período das oscilações do sistema?

*XV-23 - A lei de fôrça de uma mola é representada gràficamente abaixo:

$F = - k_1 x \qquad (x < 0)$

$F = - k_2 x \qquad (x > 0)$

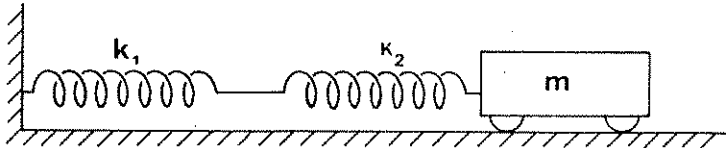
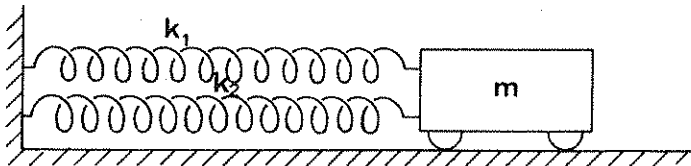
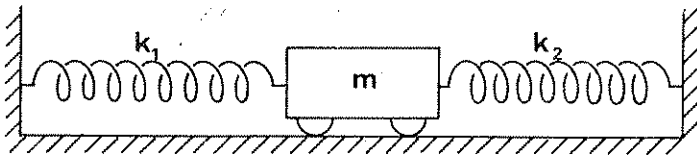
Suspendendo-se uma bola de massa $\underline{m}$ a essa mola, qual é o período das oscilações?

XV-24 - Referindo-se ao problema precedente, suponha que a energia total do oscilador seja E. Qual é a razão entre a elongação máxima com a mola comprimida e a elongação máxima com a mola alongada?

XV-25 - Você dobra a energia de determinado oscilador harmônico. O que acontece à amplitude? Ao período?

XV-26 - Você dobra a amplitude de determinado oscilador harmônico. O que acontece à energia? À velocidade máxima? Ao período?

XV-27 - Um oscilador harmônico tem período de 2,0s e amplitude de 10cm. Qual é o valor da aceleração máxima?

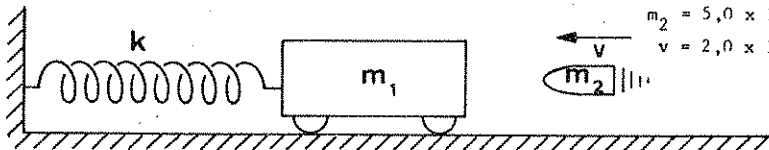
XV-28 - Qual é o período do oscilador representado na figura abaixo?

XV-29 - Qual é o período do oscilador representado na figura abaixo?

XV-30 - Qual é o período do oscilador representado na figura abaixo?

*XV-31 - A figura abaixo mostra um projétil sendo atirado em um carrinho prêso na extremidade de uma mola.

O projétil fica prêso no carrinho. Qual é a amplitude das oscilações do sistema, depois do tiro?

$k = 50 N/m$

$m_1 = 2{,}0 kg$

$m_2 = 5{,}0 \times 10^{-3} kg$

$v = 2{,}0 \times 10^2 m/s$

*XV-32 - Uma plataforma horizontal oscila verticalmente com movimento harmônico simples. A amplitude do movimento é 50cm. O período é 1,0s. No instante em que a plataforma se encontra no seu ponto de retôrno inferior, você coloca em cima uma bola de gude (cuja massa é muito menor que a massa da plataforma).

Tomando como origem a posição de equilíbrio da plataforma, determi-

ne o ponto em que a bola de gude perderá o contato. Qual é então a velocidade da bola de gude?

XV-33 - Uma massa de 2,0kg está suspensa por meio de uma mola ao teto de um elevador que está subindo com velocidade constante de 2,0m/s. O sistema está em equilíbrio estático (no referencial do elevador, com a mola alongada de 10cm a partir de sua posição relaxada.

O elevador pára de repente. Qual é a amplitude das oscilações subsequentes da massa suspensa? ($g = 10m/s^2$)

XV-34 - Um bloco de madeira de 5,0kg está suspenso a uma mola cujo coeficiente é 200N/m. Estando o sistema em equilíbrio estático, você atira verticalmente um projétil de 20g, com velocidade de 200m/s, e o projétil fica engastado no bloco. Qual é a amplitude das oscilações subsequentes do bloco?

*XV-35 - Volte ao problema XV-33. Suponha agora que o elevador esteja caindo em queda livre. A massa superior suspensa à mola está em repouso em relação ao elevador, mas agora a mola está na sua posição relaxada. Depois de uma queda livre de 5,0m, o elevador atinge o solo (sem quebrar nada!).

Qual é a amplitude das oscilações da massa suspensa?

XV-36 - Na seção XV-6-2, eu lhe mostrei a equivalência entre $\cos \alpha$ e $(1 - \frac{1}{2} \alpha^2)$ para $\alpha \ll 1$ radiano.

Até onde podemos ir com essa aproximação?

Por curiosidade, tome $\alpha = \frac{1}{2}$ radiano, e me diga de quanto diferem as duas expressões.

XV-37 - Diz-se de um pêndulo que êle "bate o segundo" quando o semi-período do pêndulo é 1,000s.

No Rio de Janeiro, $g = 978cm/s^2$. Qual é o comprimento do pêndulo simples que "bate o segundo" no Rio?

XV-38 - Se você quiser dobrar o período de um pêndulo simples, como deve modificar o seu comprimento?

XV-39 - Se o período de um pêndulo é 1,0s na Terra, qual será o período no pêndulo:

a) em uma nave em órbita em tôrno da Terra?

b) na Lua, onde a intensidade do campo gravitacional é $\frac{1}{6}$ do seu valor na Terra?

XV-40 - Um pêndulo tem período de 1,0s no Laboratório.

Você transporta êsse pêndulo em um elevador. Qual será o período do pêndulo:

a) quando o elevador está subindo com aceleração de $2{,}0 m/s^2$?

b) quando o elevador está subindo com velocidade constante de 1,5m/s?

c) quando o elevador freia com aceleração (dirigida para baixo) de $2{,}0 m/s^2$.

($g = 10\ m/s^2$)

XV-41 - Uma bola de gude oscila no fundo de um recipiente hemisférico de 10cm de raio. Qual o período das oscilações? ($g = 10 m/s^2$).

*XV-42 - Considere um pêndulo simples (massa $\underline{m}$; comprimento $\underline{\ell}$). Seja θ_o a elongação angular máxima (não necessàriamente pequena). Qual é a tensão da corda:

a) nos pontos de retôrno?

b) na passagem pela posição de equilíbrio?

XV-43 - O pêso máximo que uma corda pode sustentar estàticamente sem quebrar é 100N.

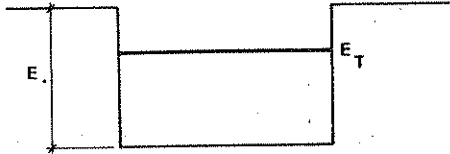
Suspendendo à corda uma massa de 10kg para formar um pêndulo simples, qual é a amplitude máxima que você pode dar sem que a corda quebre?

($g = 9{,}78 m/s^2$) (*).

(*) Faça antes o Problema XV-42.

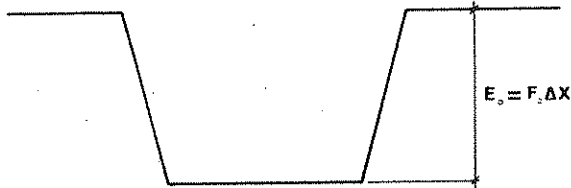
RESPOSTAS DOS PROBLEMAS

XV-2 - $1,0 \times 10^{-2}$m/s; $0,5 \times 10^{-4}$J; $1,0 \times 10^{3}$; -1.

XV-3 - O poço é o chamado "poço retangular":

O que significa, fìsicamente, a "profundidade" E_o do poço?

XV-4 - a) $E_p = mg\ell(1 - \cos\theta)$

b) $E_p = mg\ell(1 - \cos \frac{s}{\ell})$

XV-5 - a)

b) O poço transforma-se em poço retangular, mas a profundidade permane ce a mesma ($F_o\Delta x$ = Cte!)

XV-6 - Observe primeiro que para que haja oscilações, $E < E_o$.

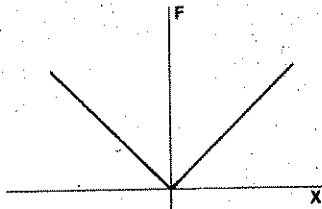
a) Amplitude = d

b) $T = 4d\sqrt{\frac{m}{2E}}$

XV-7 - a) $T = (4d + \frac{\varepsilon a}{E})\sqrt{\frac{m}{2E}}$. Observe que a perturbação do poço de poten-

cial entra somente pela sua área εa. Tanto faz ter um obstáculo baixinho e gordo, ou alto e magro, desde que as áreas sejam iguais.

Desde que $\varepsilon << E$, claro.

XV-8 -

XV-9 - T = 8,0 s.

XV-10 - Transporte a origem das posições no ponto $(-\frac{b}{2a})$, e some a constante $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ à energia: o que é sempre possível. Você terá um poço da forma $E_p = Ax^2$.

XV-11 - Maior massa, maior inércia, menor aceleração, menor velocidade, maior período... Continue!

XV-12 - $E_p = \frac{1}{2} kx^2 - mgx + E_o$. Pondo $X = x - \frac{mg}{k}$:

$$E_p = \frac{1}{2} k(X + \frac{mg}{k})^2 - mg(X + \frac{mg}{k}) + E_o$$

$$E_p = \frac{1}{2} kX^2 - \frac{m^2g^2}{2k} + E_o$$

É obviamente a mesma parábola que $\frac{1}{2} kx^2$ (a menos da translação $\frac{m^2g^2}{2k} - E_o$, a qual não muda a forma da curva).

XV-13 - Se você mudar o valor de E_o, você não muda o valor de $x_o = \frac{mg}{k}$. Em consequência, a única coisa que acontece ao poço é uma translação paralela ao eixo das energias. Isso não muda em nada o período ou a amplitude do oscilador. Acrescenta simplesmente uma constante à energia total. Mas lembre-se: mais importantes que as energias são as variações de energias.

XV-14 - Certamente, pelo menos em parte, foi transformada em energia potencial gravitacional. Pode, também em parte, ser transformada em energia potencial na mola.

XV-15 - $T = 2{,}0s$; $f = \frac{1}{T} = 0{,}50/s$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 3{,}1$ rad/s.

XV-16 - $k = \frac{10}{1{,}0 \times 10^{-1}} = 1{,}0 \times 10^{2} N/m$.

$A = 10cm$; $T = 0{,}63s$; $f = 1{,}6/s$; $\omega = 10$ rad/s.

XV-17 - Período e frequência não dependem da energia e sim, exclusivamente, dos parâmetros do oscilador (desde que êle seja harmônico, claro).

Para calcular a amplitude, iguale a energia cinética máxima

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2)^2 = 2{,}0 \text{ J},$$

à energia potencial máxima $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot A^2 = 50A^2$:

$$50A^2 = 2 \rightarrow A^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow A = 0{,}20m.$$

XV-18 - O pêso da bola é 2,0N, e temos

$$2{,}0 = k \times 2{,}0 \times 10^{-2} \rightarrow k = 1{,}0 \times 10^{2} N/m.$$

A amplitude é $1{,}0 \times 10^{-2}m$; $T = 0{,}28s$: $f = 3{,}6/s$; $\omega = 22$ rad/s.

XV-19 - Se $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = 10/s \Rightarrow \frac{k}{m} = 100$ (1)

A energia total é $\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$ ou seja:

$$E = \frac{1}{2} m(2{,}0)^2 + \frac{1}{2} k(1{,}0 \times 10^{-1})^2 = 2m + \frac{k}{200} = 2{,}5 \quad (2)$$

As equações (1) e (2) fornecem $m = 1{,}0kg$ e $k = 100N/m$.

Para achar a amplitude: $\frac{1}{2} kA^2 = E$ total.

$$\Rightarrow A^2 = 5 \times 10^{-2} \rightarrow A = 22cm.$$

XV-20 - A fôrça mg alonga a mola de ℓ, e consequentemente ela alonga cada metade de $\frac{\ell}{2}$. A constante da nova mola é $k = \frac{m\,g}{\ell/2} = \frac{2mg}{\ell}$.

O período é $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{2g}}$.

XV-21 - A constante da "mola" é $\frac{5,0 \times 10^{-10}}{1,0 \times 10^{-12}} = 5,0 \times 10^{2}$ N/m.

A massa do proton é $1,67 \times 10^{-27}$ kg.

$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 8,7 \times 10^{13}$/s.

XV-22 - A constante da mola é $k = \frac{Mg}{\ell}$. Com a sôbre carga, o período é

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(M + m)\ell}{Mg}}$$

XV-23 - Não já nada de extraordinário nêste problema! A semi-oscilação com a mola comprimida dura

$$\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} \; ;$$

a semi-oscilação com a mola alongada dura

$$\pi \sqrt{\frac{m}{k_2}} \; .$$

Então $T = \pi \left\{ \sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}} \right\}$

XV-24 - Do lado das compressões: $\frac{1}{2} k_1 A_1^2 = E$

Do lado dos alongamentos: $\frac{1}{2} k_2 A_2^2 = E$

De modo que $\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$.

XV-25 - Não acontece nada ao período. A amplitude é multiplicada por $\sqrt{2}$.

XV-26 - Não acontece nada ao período. A energia é multiplicada por 4. A velocidade máxima é multiplicada por 2.

XV-27 - O valor absoluto da aceleração máxima é $\omega^2 A = \frac{k}{m} A$.

Ora, $\frac{k}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2}$ $\quad a_{máx} = \frac{4\pi^2 A}{T^2}$.

Numèricamente, $a_{máx} = 98cm/s^2$.

XV-28 - Se você exerce uma fôrça F sôbre o sistema das duas molas, a primeira alonga-se de x, tal que $F = k_1 x_1$, e a segunda de x_2 tal que $F = k_2 x_2$. Então

$$k_1 x_1 = k_2 x_2, \text{ ou } \frac{x_1}{1/k_1} = \frac{x_2}{1/k_2} = \frac{x}{1/k_1 + 1/k_2}$$

em que x é o alongamento total.

O k equivalente é tal que F = kx.

Você conclui que $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

O período é $T = 2\pi\sqrt{m(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})}$.

XV-29 - Se você exerce uma fôrça F sôbre o carrinho, cada mola se alonga de x. Para a mola superior temos $F_1 = k_1 x$.

E para a mola inferior, $F_2 = k_2 x$.

Então $\frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2} = \frac{F_1 + F_2}{k_1 + k_2} = \frac{F}{k_1 + k_2}$, o que mostra que o k equivalente é $k_1 + k_2$.

O período é $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$.

XV-30 - Convença-se que o problema é idêntico ao precedente!

XV-31 - Cuidado com êsse problema! No choque, a energia mecânica não se conserva, mas o momentum, sim!

Sendo v a velocidade do carrinho depois do tiro, temos

$$(2,0 + 5,0 \times 10^{-3})v = 5,0 \times 10^{-3} \times 2,0 \times 10^2.$$

$$v = 0,50m/s.$$

A energia total do oscilador é:

$$\frac{1}{2}(2,0 + 5,0 \times 10^{-3}) \times (0,50)^2 = 0,25J$$

A amplitude é dada por $\frac{1}{2} 50\ A^2 = 0,25 \rightarrow A = 10cm$.

XV-32 - Isole a bola de gude. As fôrças que agem são o pêso $m\vec{g}$ e a fôrça de contato $\vec{F}$ exercida pela plataforma (enquanto houver contato).

Você conclui que, enquanto houver contato, a fôrça resultante tem um módulo menor que $m\vec{g}$, e consequentemente, a aceleração da bola é menor que $\vec{g}$.

À medida que a plataforma se afasta da sua posição de equilíbrio, o módulo da aceleração aumenta (lembre-se que $|a| = \omega^2|x|$). $\vec{F}$ deve então diminuir.

$\vec{F}$ se anula, perdendo a bola o contato com a plataforma, assim que $\omega^2 x = g$, ou $(4\pi^2/T^2)x = g \rightarrow x = gT^2/4\pi^2$. Numèricamente, $x = 25cm$.

Nêsse instante, a velocidade da bola é igual à velocidade da plataforma. Observe que a posição instantânea dessa última é a metade da elongação máxima. A energia potencial é consequentemente 1/4 do valor máximo, e a energia cinética, 3/4 do valor máximo. Concluímos que a velocidade é $\sqrt{3}/2$ do valor máximo $\underline{\omega A}$. Então $v = \sqrt{3}/2\ .\ 2\pi/1\ .\ 50 = 2,72 \times 10^2 cm/s$.

XV-33 - O problema é equivalente ao seguinte: Qual é a amplitude de oscilação da massa suspensa, quando se lhe comunica uma velocidade de 2,0 m/s a partir da posição de equilíbrio?

O $\underline{k}$ da mola é dado por $mg = kx_o \rightarrow k = \frac{mg}{x_o} = 200\ N/m$.

A energia cinética máxima é $\frac{1}{2} mv^2 = 4,0J$. Ela se transforma integralmente em energia potencial, na posição de elongação máxima.

$$\frac{1}{2} 200A^2 = 4 \rightarrow A = 0,20m.$$

XV-34 - A conservação do momentum no instante em que o projétil penetra no bloco fornece a velocidade inicial dêsse último:

$$20.10^{-3} \times 2,0.10^2 = (5,0 + 20.10^{-3})v \rightarrow v = 0,80m/s.$$

A amplitude A é tal que $\frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{k}}\ v$: $A = 12,6cm$.

XV-35 - A velocidade inicial da massa é $\sqrt{2gh} = 10m/s$.

Na posição de equilíbrio estático, a mola está alongada de 10cm. (Problema XV-33). Concluímos então que no instante do choque, a energia total (em relação à posição de equilíbrio estático) é:

$$\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} . 200 . 10^{-2} + \frac{1}{2} . 2 . 10^2 = 101 \text{ J}.$$

A amplitude das oscilações é dada por $\frac{1}{2} . 200A^2 = 101 \rightarrow A = 1,0m$.

Você vê que, na prática, não tem importância a energia suplementar devida a deformação da mola (a partir da posição de equilíbrio estático) Mas conceitualmente tem.

XV-36 - Você deve achar que elas diferem de 3 a 4 partes em 1000!

De modo que, até uns 25^o, a aproximação $\cos\alpha \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ é perfeitamente aceitável para a classe de experiência que estamos fazendo, você, o Martins e eu.

Em outros têrmos, o tal de "pequenas" oscilações do pêndulo simples vai tranquilamente até uns 25^o.

XV-37 - $\ell = \frac{g}{\pi^2}$: numèricamente, $\ell = 99,1cm$.

XV-38 - Deve quadruplicá-lo.

XV-39 - a) na nave em órbita, o pêndulo não oscila: todo o "g" fornecido pela Terra é necessário para mantê-lo em órbita junto com a nave!

b) $\sqrt{6}$ vêzes maior que na Terra, ou seja, 2,4s.

XV-40 - O Problema XIII-47 do Capítulo XIII (*) mostrou que, para um observador no elevador com aceleração $\vec{a}$ no referencial terrestre, tudo se passa como se o elevador estivesse parado em um campo gravitacional $\vec{g}-\vec{a}$.(Revê também a seção VIII-1-4 do Capítulo VIII, no Volume I).

Sendo T_o o período no Laboratório e T, o período no elevador, temos:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \; ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g \pm a}} \; ; \quad T = T_o \sqrt{\frac{g}{g \pm a}} .$$

Sinal + para o elevador acelerado para cima; sinal - para o elevador

(*) <u>Física com Martins e eu</u>, volume II, fascículo 1.

acelerado para baixo.

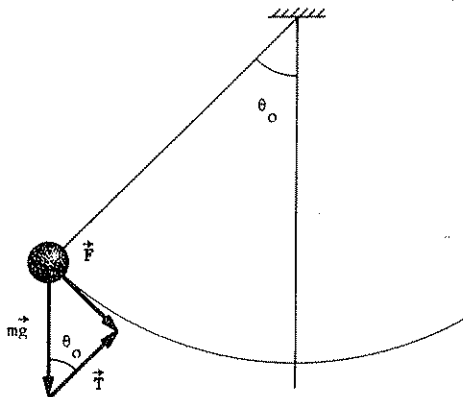
a) $T = 0,92s$.

b) $T = 1,0s$: (o elevador em translação retilínea uniforme é um referencial inercial, i.e., equivalente ao Laboratório).

c) $T = 1,5s$.

XV-41 - O sistema é equivalente a um pêndulo simples de 10cm de comprimento. $T = 0,63s$.

XV-42 - a) na posição de elongação máxima, a velocidade é nula, e consequentemente a componente normal da aceleração é nula. Você conclui que a resultante $\vec{F}$ do pêso $m\vec{g}$ e da tração $\vec{T}$ é perpendicular ao fio do pêndulo.

$$|\vec{T}| = |m\vec{g}| \cos\theta_o$$

b) Ao passar pela posição de equilíbrio, o movimento deixa de ser acelerado e passa a ser retardado. Instantâneamente, a componente tangencial da aceleração se anula. A aceleração tem módulo igual a v^2/ℓ, de modo que a fôrça resultante $|\vec{T} - m\vec{g}| = mv^2/\ell$, ou seja, $|\vec{T}| = m(g + v^2/\ell)$. Para calcular v^2, iguale a energia cinética máxima e energia potencial máxima:

$\frac{1}{2} mv^2 = mg\ell(1-\cos\theta_o)$. Obtém-se $|\vec{T}| = mg(3-2\cos\theta_o)$.

XV-43 - Pelo Problema XV-42, a tensão é máxima quando o pêndulo passa pela posição de equilíbrio. (Por quê mesmo?), valendo $mg(3-2\cos\theta_o)$.

No caso presente, devemos ter:

$$97,8\ (3-2\cos\theta_o) < 100 \rightarrow \cos\theta_o > 0,923.$$

$$\theta_o < 22^o40'$$